

Διδάσκοντες: Γ. Παπαγεωργίου Ι. Χρυσοβέργης

Σεπτέμβρης 2001/α

Θέμα 1 (1, 0.5, 1.5)

α) Να περιγράψετε την Γενική Επαναληπτική μέθοδο για την επίλυση ενός ομαλού $n \times n$ γραμμικού συστήματος $Ax = b$. Εν συνεχείᾳ να δειχθεί ότι η μέθοδος συγκλίνει αν $\|B\| < 1$ για κάποια φυσική νόρμα πίνακα, όπου B ο πίνακας των επαναλήψεων της μεθόδου.

~~β)~~ Να εξετάσετε αν η Επαναληπτική Μέθοδος Jacobi συγκλίνει για 2×2 γραμμικά συστήματα με πίνακα συντελεστών τον πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 12 \end{pmatrix}$$

~~γ)~~ Να γίνουν δύο επαναλήψεις της μεθόδου Gauss-Seidel για την αριθμητική επίλυση γραμμικού συστήματος $Ax = b$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & 10 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 23 \\ 36 \\ 43 \end{bmatrix},$$

με αρχικό διάνυσμα $(0, 0, 0)$, και να δοθεί μια εκτίμηση του σφάλματος στην επανάληψη, με νόρμα $\|\cdot\|_\infty$, χρησιμοποιώντας τον πίνακα των επαναλήψεων της μεθόδου

Jacobi και όχι της μεθόδου Gauss-Seidel. $(\|x^{(k)} - x\| \leq \frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \cdot \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|)$

Θέμα 2 (1, 1)

α) Να υπολογιστεί ο απλός τύπος Τραπεζίου χωρίς όρο σφάλματος, και με βάση αυτόν ο αντίστοιχος σύνθετος.

~~β)~~ Δίνεται το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{\pi/2} \cos(x/2) dx$. Αν ο σύνθετος τύπος Τραπεζίου εφαρμοστεί για τον υπολογισμό του I με σφάλμα το πολὺ $\frac{1}{2} \times 10^{-4}$, πόσα σημεία πρέπει να χρησιμοποιηθούν. ($E_T = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi)$)

Θέμα 3 (1, 1, 1)

α) Να αποδειχθεί η σύγκλιση της μεθόδου της διχοτόμησης για την αριθμητική επίλυση μιας εξίσωσης $f(x) = 0$ σε ένα διάστημα $[a, b]$, κάτω από τις κατάλληλες υποθέσεις.

~~β)~~ Να γίνει γραφικός εντασιμός των πραγματικών ριζών της εξίσωσης:

$$f(x) = \ln|1+x| - 1/x = 0.$$

και να υπολογιστεί η θετική ρίζα εφαρμόζοντας την επαναληπτική μέθοδο Newton-Raphson, εκτελώντας δύο επαναλήψεις. (Όσο πλησιέστερα η αρχική προσέγγιση στην ρίζα τόσο το καλλίτερο).

β) Δίνεται το σύστημα των μη γραμμικών εξισώσεων:

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$$

$$f_2(x, y) = (x-4)^2 + (y-4)^2 - 16 = 0$$

οι οποίες αντιπροσωπεύουν δύο καμπύλες στον \mathbb{R}^2 . Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων αυτών για να εκτιμηθούν οι λύσεις του συστήματος. Εν συνεχεία να υπολογιστεί ο επαναληπτικός τύπος της μεθόδου Newton-Raphson για την προσέγγιση της λύσης του συστήματος, και να εφαρμοστεί μία φορά η μέθοδος για την προσέγγιση της μιας λύσης με αρχικό διάνυσμα $(x_0, y_0) = (1.9, 3.9)^T$.

Θέμα 4 (1, 1)

α) Να υπολογιστεί εφαρμόζοντας αναλυτικά το κριτήριο των ελαχίστων τετραγώνων η παραβολή $f(x) = ax^2 + bx + c$ η οποία προσεγγίζει τα δεδομένα:

i	1	2	3	4	5	=
x_i	-2	-1	0	1	2	=
y_i	10	1	0	2	9	=

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 - \cos \frac{\pi x}{2}$ και τα σημεία $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Να υπολογιστεί το πολυώνυμο παρεμβολής Newton με διηρημένες διαφορές, που παρεμβάλλει την $f(x)$. Εν συνεχεία να υπολογιστεί μία εκτίμηση του σφάλματος της παρεμβολής της $f(x)$ με πολυώνυμο Lagrange της μορφής:

$$|f(x) - p_2^L(x)| \leq M, \quad \forall x \in [-1, 1].$$

$$\left\{ f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j) \right\}$$

ΚΛΗΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑ