

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Διδάσκοντες: Ι. Κολέτσος & Γ. Παπαγεωργίου

9-10-2002/ B

1. a) Να περιγράψετε την Γενική Επαναληπτική μέθοδο για την επίλυση ενός ομαλού  $n \times n$  γραμμικού συστήματος  $Ax = b$ . Εν συνεχείᾳ να δειχθεί ότι η μέθοδος συγκλίνει αν  $\|B\| < 1$  για κάποια φυσική νόρμα πίνακα, όπου  $B$  ο πίνακας των επαναλήψεων της μεθόδου.

- β) Να εξετάσετε αν η Επαναληπτική Μέθοδος Jacobi συγκλίνει για  $2 \times 2$  γραμμικά συστήματα

με πίνακα συντελεστών των πίνακα:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 12 \end{pmatrix}$ .

- γ) Να δειχθεί ότι η μέθοδος Gauss-Seidel για συστήματα με πίνακα  $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ -a & a \end{pmatrix}$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $a > b$ , συγκλίνει. (3)

2. a) Να υπολογιστεί το πολυνόμιο παρεμβολής Lagrange  $p(x)$  για την συνάρτηση  $f(x) = \ln(1+x)$  στα σημεία  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1/4$ ,  $x_2 = 1/2$ ,  $x_3 = 3/4$

- β) Να δοθεί άνω φράγμα του σφάλματος  $|f(x) - p(x)|$ , για  $x=1$  και για  $x=1/3$ .

- γ) Να αποδειχθεί η ταυτότητα:

$$x_0^4 L_0(x) + x_1^4 L_1(x) + x_2^4 L_2(x) + x_3^4 L_3(x) = x^4 - (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

$$\left\{ f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j) \right\}. \quad (3)$$

3. a) Η εξίσωση:  $x = 1 - (1/4) \sin x$ , (το  $x$  σε ακτίνα), (1)

έχει μοναδική ρίζα  $\rho$  στο  $\mathbb{R}$ . Να υπολογιστούν οι τρεις πρώτες προσεγγίσεις της ρίζας  $\rho$  με την μέθοδο διχοτόμησης και αρχικό διάστημα το  $[0, 1]$ . Να δειχθεί η γενική εκτίμηση σφάλματος της μεθόδου διχοτόμησης, και στην συνέχεια να υπολογιστεί πόσο το πολύ απέχει η τρίτη προσέγγιση του υπολογιστεί από την ρίζα  $\rho$ .

- β) Να δειχθεί ότι η γενική επαναληπτική μέθοδος:  $x_{k+1} = 1 - (1/4) \sin x_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

συγκλίνει στην ρίζα  $\rho$  της (1), για κάθε  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Να γίνουν τρεις επαναλήψεις με  $x_0 = 0.5$ . (2)

4. a) Να υπολογιστεί ο απλός πύρος Τραπεζίου χωρίς όρο σφάλματος, για την προσέγγιση του ορισμένου ολοκληρώματος και με βάση αυτόν ο αντίστοιχος σύνθετος.

- β) Δίνεται το ολοκλήρωμα  $I = \int_1^3 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$ . Να προσεγγίσετε το ολοκλήρωμα αυτό όταν  $h = 0.25$ , με τον αντίστοιχο σύνθετο. Αν ο σύνθετος πύρος Τραπεζίου εφαρμοστεί για τον υπολογισμό του  $I$  με σφάλμα το πολύ  $\frac{1}{2} \times 10^{-4}$ , πόσα σημεία πρέπει να χρησιμοποιηθούν.

$$(E_T = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi)) \quad (2)$$

ΚΛΗΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

© ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2.30 ΩΡΕΣ ©