

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ
 26 Φεβρουαρίου 2005

~~ΘΕΜΑ 1.~~ (α) Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$y' + \alpha y = \beta e^{-\lambda x}, \quad \alpha, \lambda > 0 \text{ και } \beta \in \mathbb{R}.$$

Δείξτε ότι για κάθε λύση της $y(x)$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$.

(β) Να λύθει το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2, \quad y(-1) = 0$$

γνωρίζοντας ότι μία λύση της δ.ε. $y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2$ είναι η $y_1(x) = \frac{1}{x}$.

~~ΘΕΜΑ 2.~~ Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$y'' + y' + 4e^{-2x}y = 0. \quad (1)$$

(α) Να βρεθεί η διαφορική εξίσωση στην οποία μετατρέπεται η (1) με την αντικατάσταση $t = e^{-x}$.

(β) Να βρεθεί η γενική λύση της (1).

~~ΘΕΜΑ 3.~~ Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$4y'' + 4y' + 9y = 7\delta(t-3) + 4\delta(t), \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

~~ΘΕΜΑ 4.~~ Να βρεθούν οι τέσσερις πρώτοι, μη μηδενικοί όροι, του αναπτύγματος σε διυγμοσειρά της λύσης $y(\mathbf{x})$ του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y'' - 2xy' - 2y = e^x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

~~ΘΕΜΑ 5.~~ (α) Αν μία συνάρτηση $f(t)$ είναι κατά τιμήματα συνεχής στο $[0, +\infty)$ και εκθετικής τάξης α , τότε υπάρχει η μετασχηματισμένη Laplace της f για κάθε $s > \alpha$.

(β) Δείξτε ότι όλες οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης $\alpha y'' + \beta y' + \gamma y = 0$ είναι εκθετικής τάξης ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$).

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} = \frac{3}{\lambda}$$

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες

Καλή επιτυχία