

ΘΕΜΑΤΑ

1. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'(x) = \frac{2y^2 + 7xy + 4x^2}{x^2}, \quad y(1) = 2$$

Σε ποιό διάστημα ορίζεται η λύση;

2. Βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$x^4 y'' + 2x^3 y' - 4y = \frac{1}{x^2}, \quad x > 0$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε αλλαγή μεταβλητής $t = \frac{1}{x}$

3. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$x''(t) + x(t) = \begin{cases} e^t, & 1 \leq t \leq 2 \\ 0, & t \in [0, 1) \cup (2, \infty) \end{cases}$$

με $x(0) = 0, x'(0) = 1$.

4. Να βρεθούν οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$x^2 y'' + x(x+1)y' - y = 0$$

που έχουν τη μορφή $y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n, r \in \mathbb{R}, \alpha_0 \neq 0$

5. α) Αν η συνάρτηση $f(t)$ είναι εκθετικής τάξεως και η $f'(t)$ είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, δείξτε ότι

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

β) Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) + y(t) \\ y'(t) &= 2x(t) + y(t) \end{aligned}$$