



ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ
«ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ»

7/09/2004 ΩΡΑ: 12:00

Θέμα 1^ο (βαθ. 2)

Να βρεθεί το γενικό ολοκλήρωμα της διαφορικής εξίσωσης:

$$2x y \ln y dx + (x^2 + y^2 \sqrt{y^2 + 1}) dy = 0.$$

Θέμα 2^ο (βαθ. 2)

Δείξτε ότι κάθε λύση $y(x)$ της διαφορικής εξίσωσης $\alpha y''(x) + \beta y'(x) + \gamma y(x) = 0$, $\alpha, \beta, \gamma > 0$ ικανοποιεί τη σχέση $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$. Τι συμπέρασμα βγάξετε για το παραπάνω όριο στην περίπτωση που $\alpha < 0$ και $\beta, \gamma > 0$;

Θέμα 3^ο (βαθ. 2)

Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$\frac{1}{2} y''(x) + 2 y(x) = \tan 2x - \frac{1}{2} e^x.$$

Θέμα 4^ο (βαθ. 2)

Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = |t-1|, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Θέμα 5^ο (βαθ. 2)

Να βρεθεί η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών :

$$y''(x) - x y'(x) + 2y(x) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$$

υπό τη μορφή δυναμοσειράς.

Δίνονται:

1) $L\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n=0,1,2,\dots$, 2) $L\{e^{at} f(t)\}(s) = F(s-a)$, όπου $F(s) = L\{f(t)\}(s)$

3) $L\{\phi(t-\alpha)H(t-\alpha)\}(s) = e^{-as}\Phi(s)$, $\alpha \geq 0$, όπου $L\{\phi(t)\}(s) = \Phi(s)$ και

$$H_\alpha(t) = H(t-\alpha) = \begin{cases} 1, & t \geq \alpha \\ 0, & t < \alpha \end{cases} \quad \text{η συνάρτηση Heaviside}$$

4) $L\{y''(t)\}(s) = s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0)$.

Handwritten notes:
 $y'' + \alpha y' + \beta y = 0$
 $r^2 + \alpha r + \beta = 0$
 (Scribbles and diagrams)

Handwritten notes:
 $y(s)$
 $a=5$
 $\frac{1}{2}ae^x - 2ae^x - \frac{1}{2}e^x$
 $\frac{5}{2}ae^x = -\frac{1}{2}e^x$