



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών
Επιστημών
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ III
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ.....

Θέμα 1 ~~Na~~ Να υπολογιστεί ο όγκος του κοινού μέρους της σφαίρας $x^2+y^2+z^2 \leq a^2$ και του ορθού κυλίνδρου $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{4}$. ~~β~~

Θέμα 2 (a) Έστω γ μια επίπεδη καμπύλη και $f(x,y)$ μια μη αρνητική συνεχής συνάρτηση που ορίζεται πάνω στην γ. Δικαιολογήστε απλά γιατί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int\limits_{\gamma} f(x,y)dl$,

όταν υπάρχει, δίνει το εμβαδόν της ορθής κυλινδρικής επιφάνειας με βάση την γ και ύψος στο σημείο (x,y) της γ ίσο με $f(x,y)$.

(b) ~~Na~~ Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τμήματος της κυλινδρικής επιφάνειας $x^2+y^2=9$ που βρίσκεται μεταξύ του xy -επιπέδου και του επιπέδου $z=x+3$. ~~β~~

Θέμα 3 Δίδεται το διανυσματικό πεδίο $F(x,y)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

~~β~~ Βρείτε το πεδίο ορισμού του F και χαρακτηρίστε το ως απλά ή πολλαπλά συνεκτικό χωρίο. Δικαιολογήστε την απάντηση.

~~β~~ Δώστε τον ορισμό των συντηρητικού διανυσματικού πεδίου σ'ένα ανοικτό και συνεκτικό σύνολο $T \subseteq \mathbb{R}^2$ και αναφέρατε τρείς ισοδύναμες προτάσεις για να είναι ένα διανυσματικό πεδίο συντηρητικό στο T .

~~β~~ ~~iii~~ Εξετάστε αν το F είναι συντηρητικό στο πεδίο ορισμού του.

(iv) Αν το F είναι συντηρητικό, βρείτε μια συνάρτηση δυναμικού του F στο πεδίο ορισμού του και υπολογίστε το έργο του κατά μήκος της καμπύλης $y=\text{Arctan}x+1$, $x \in [0, \pi/4]$ x στο $(0,1)$.

Θέμα 4 Έστω S η επιφάνεια $z=1-x^2-4y^2$, $z \geq 0$ και το διανυσματικό πεδίο $F(x,y)=(y-z, -x-z, x+y)$. Υπολογίστε με τρείς τρόπους το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\iint_S (\tau_0 F) \cdot n \, d\sigma,$$

όπου n το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της S που σχηματίζει οξεία γωνία με τον θετικό z -έξινα.

**ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ 3 ΉΡΕΣ
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**