

ΣΕΜΦΕ: Μαθηματική Ανάλυση III Φεβρουάριος 2004

ΘΕΜΑ 1ο Α. Δίνεται το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F}(x, y) = (e^x \eta y, e^x \sigma y, 3z^2 + 2)$$

Να αποδειχθεί ότι υπάρχει διαφορίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\nabla f = \mathbf{F}$, να βρεθεί αυτή και να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_{ABCDA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, όπου \mathbf{r} η τεθλασμένη OAB όπου

$O(0, 0, 0), A(1, \frac{\pi}{2}, 0), B(1, \frac{\pi}{2}, 1)$.

Β. Δίνεται το διαν. πεδίο $\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{(x+1)^2+y^2}, \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2} \right)$. Να υπολογισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_{ABCDA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$:

a) στην τεθλασμένη $ABCDA$ με $A(-2, -2), B(1, -2), C(3, 2), D(-4, 3)$.

b) Στην έλλειψη $(x-2)^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ κατά τη θετική φορά.

ΘΕΜΑ 2ο: A. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι αρμονική ($f_{xx} + f_{yy} = 0$) να αποδειχθεί ότι $\oint_{ABCDA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ όπου $\mathbf{F} = (f_{yx}, -f_{xy})$ και \mathbf{r} το σύνορο ενός τόπου Green.

B. Να υπολογισθεί με χρήση του θεωρήματος Green το εμβαδόν του τόπου μεταξύ της έλλειψης $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ και του κύκλου $x^2 + y^2 = 25$, με ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα κατάλληλου διανυσματικού πεδίου.

ΘΕΜΑ 3ο: A. Δίνεται το $I = \int_0^1 dx \int_{1-x}^{1+x} xy dy$.

1. Να σχεδιασθεί το χωρίο ολολήρωσης.
2. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα και να επαληθευθεί το αποτέλεσμα αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης.

B. Χρησιμοποιώντας κατάλληλο μετασχηματισμό να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

$$I = \iint_{\Omega} e^{\frac{x-y}{xy}} dx dy$$

όπου Ω το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία: $A(0, 1), B(0, 2), \Gamma(2, 0), \Delta(1, 0)$.

ΘΕΜΑ 4ο: Έστω $\alpha = \text{rot } \beta$, $\beta = (yz, y, z)$. Να υπολογισθεί η ροή του α δια της επιφάνειας του παραβολοειδούς $z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 2$ και να επαληθευθεί το αποτέλεσμα με ένα επικαμπύλιο ολοκήρωμα.