

Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. 3^ο ΕΞΑΜΗΝΟ

ΕΞΕΤΑΣΗ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΙ

Όνοματεπώνυμο:

Ζήτημα 1^ο: Δίνεται η διανυσματική συνάρτηση

$$F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2 + (y-1)^2} + y \right) \mathbf{i} + \left(\frac{y-1}{x^2 + (y-1)^2} + x \right) \mathbf{j}.$$

(α) Προσδιορίστε το πεδίο ορισμού της F και χαρακτηρίστε το ως απλά ή πολλαπλά συνεκτικό χωρίο. Δικαιολογήστε γιατί δεν υπάρχει συνάρτηση δυναμικού στο πεδίο ορισμού της. Προσδιορίστε τη συνάρτηση δυναμικού U (αν υπάρχει) στον ημίχωρο

$$D = \{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 : y > 1 \} \text{ και τέτοια ώστε } U(1,2) = 2.$$

Ζήτημα 2^ο: Από από ένα κυκλικό κύλινδρο με ακτίνα R και ύψος h (σχήμα) αποκόπτεται με τη βοήθεια της κοχλιωτής επιφάνειας

$$x = [r + (R-r)u] \cos v, \quad y = [r + (R-r)u] \sin v,$$

$$z = \frac{h}{2\pi} v, \quad 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 2\pi, \text{ ένα τμήμα του}$$

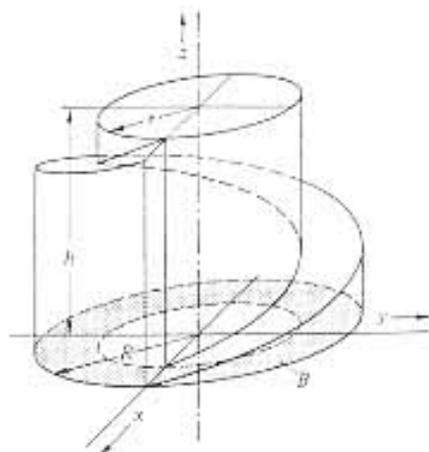
κυλίνδρου (πάνω από την κοχλιωτή επιφάνεια).
Να υπολογίσετε τον όγκο του εναπομείναντος σώματος.

Ζήτημα 3^ο: Στην αρχή O του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων $Oxyz$ βρίσκεται ένα ηλεκτρικό δίπολο με ροπή $\mathbf{M} = M\mathbf{k}$, $M > 0$, που δημιουργεί στον περιβάλλοντα χώρο ηλεκτρικό πεδίο, του οποίου η ένταση στο σημείο $P(x,y,z)$ είναι

$$\mathbf{E}(x,y,z) = K \frac{1}{r^5} [3xz\mathbf{i} + 3yz\mathbf{j} + (2z^2 - x^2 - y^2)\mathbf{k}], \text{ όπου } r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \text{ και } K \text{ σταθερά.}$$

Ζητείται η ροή Φ του ηλεκτρικού πεδίου δια του ημισφαιρίου $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$.

Ζήτημα 4^ο: Να υπολογιστεί η ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα Oz του ομογενοῦς σώματος που περιέχεται μεταξύ των επιφανειῶν $z^2 = x^2 + y^2$ (κυκλικού κώνου) και $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 2$ (σφαίρας)



ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΤΕ ΣΕ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΝΑ ΚΛΕΙΣΕΤΕ ΤΑ ΚΙΝΗΤΑ ΚΑΙ ΤΟΥΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕΣ ΣΑΣ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !!!!