ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2004

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ ΑΡΒΑΝΙΤΑΚΗΣ – ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΝΕΛΛΟΠΟΥΛΟΣ

Ζήτημα 1. Έστω $X \subset \mathbb{R}$, και f_n, f, $n \in \mathbb{N}$, πραγματικές συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το X.

(1) Διατυπώστε τον ορισμό της κατά σημείο καθώς και τον ορισμό της ομοιόμορφης σύγκλισης της $(f_n)_n$ στην f. **(0,5)**

(2) Δείξτε ότι αν η $(f_n)_n$ συγκλινει ομοιόμορφα στην f τότε συγκλίνει και κατά σημείο. **(0,2)**

Ισχύει το αντίστροφο; **(0,3)**

(3) Αν το X είναι πεπερασμένο, και η $(f_n)_n$ συγκλίνει κατά σημείο στην f, δείξτε ότι η $(f_n)_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f. **(0,5)**

Ζήτημα 2. Μια συνάρτηση g λέγεται Lipschitz με σταθερα $M > 0$, αν για κάθε x, y στο πεδίο ορισμού της ισχύει ότι $|g(x) - g(y)| \leq M|x - y|$.

Έστω $f_n, f : [a, b] \to \mathbb{R}$ με $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η f_n είναι Lipschitz με την ίδια σταθερά $M > 0$ και ακόμα ότι η ακολουθία $(f_n)_n$ συγκλίνει κατά σημείο στην f.

(1) Δείξτε ότι η f είναι επίσης Lipschitz με την ίδια σταθερά M. **(0,2)**

(2) Δείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x, y \in [a, b]$ με $|x - y| < \delta$ να ισχύει ότι

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon, \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{και} \quad |f(x) - f(y)| < \epsilon. \qquad \textbf{(0,3)}$$

(3) Χρησιμοποιώντας τά προηγούμενα ερωτήματα, καθώς και το ζήτημα 1, (3), δείξτε ότι η $(f_n)_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f. **(1,5)**

Ζήτημα 3. Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων που συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση f. Αν $x_0 \in \mathbb{R}$ και η ακολουθία πραγματικών αριθμών $(x_n)_n$ συγκλίνει στο x_0, δείξτε ότι $\lim f_n(x_n) = f(x_0)$. **(1)**

Ζήτημα 4. Θεωρούμε τη δυναμοσειρά

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1}.$$

(1) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς. **(0,2)**

(2) Δείξτε ότι $f(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$. **(0,5)**

Να δικαιολογήσετε τα επιχειρήματά σας.

Ζήτημα 5. Δείξτε ότι για κάθε $x \in (-1, 1)$,

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}. \qquad \textbf{(0,5)}$$

Να δικαιολογήσετε τα επιχειρήματά σας.

Ζήτημα 6. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{αν}(x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{αν}(x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(1) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $(0,0)$. **(0,5)**

(2) Βρείτε τις παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. **(0,5)**

(3) Δείξτε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$. **(0,5)**

Ζήτημα 7. Εξετάστε τα στάσιμα σημεία και τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$. **(0,8)**

Ζήτημα 8. Βρείτε το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με το μέγιστο όγκο ανάμεσα στα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα με σταθερό άθροισμα ακμών $4c$. **(1)**

Ζήτημα 9. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$, και $\mathbf{e}$ ένα μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$.

(1) Διατυπώστε τον ορισμό της παραγώγου της f στο $\mathbf{x}_0$ κατά την κατεύθυνση $\mathbf{e}$. **(0,3)**

(2) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$, αποδείξτε ότι η παράγωγος της f στο $\mathbf{x}_0$ κατά την κατεύθυνση $\mathbf{e}$ ισούται με $\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{e}$. **(0,7)**