

Θέμα 1. (i) Εξετάστε ως προς τη σημειωσή και ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση τις παρακάτω αισθητικές συναρτήσεων:

$$(α) f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f_n(x) = \frac{\cos nx}{n}, \quad (β) f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f_n(x) = \frac{1-x^n}{1+x^n}$$

(ii) Εξετάστε ως προς τη σημειωσή και ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές συναρτήσεων: (α) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan nx}{n^2}$, (β) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{2^n}$.

(iii) Εστω $f : [0, \infty) \rightarrow [0, +\infty)$ ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Αν το $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ υπάρχει δείξτε ότι $c = 0$.

Θέμα 2. (i) Βρείτε το πολυώνυμο Taylor βαθμού $n = 3$ με κέντρο το $\xi = 0$ της $f(x) = e^x \sin x$.

(ii) Δίνεται η συνάρτηση $f : (-2, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{2}{2-x}$. (α) Υπολογίστε τις συναρτήσεις $f'(x)$ και $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. (β) Αναπτύξτε τις $f(x)$, $f'(x)$ και $F(x)$ σε δυναμοσιευτές κέντρου $\xi = 0$, δικαιολογώντας πλήρως τα επιχειρήματα σας. (γ) Υπολογίστε το όθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Θέμα 3. (i) Διατυπώστε τον ορισμό της διαφορίσιμης συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ σε ένα $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

$$(ii) \text{ Δίνεται η συνάρτηση } f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \text{ αν } (x, y) \neq (0, 0) \text{ και } f(0, 0) = 0.$$

(α) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$. (β) Υπολογίστε τις $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ και $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

(γ) Δείξτε ότι η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$.

Θέμα 4. (i) Δίνεται συνάρτηση $f(x, y, z) = x^2 e^{yz}$. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}^3 και υπολογίστε την κατεύθυνσην παράγωγο της f στο $(1, 0, 0)$ ως προς τη κατεύθυνση του διανύσματος $u = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)$.

(ii) Εστω $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ διαφορίσιμες.

(α) Θέτουμε $F = f \circ \vec{r}$. Δείξτε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$, $F'(t) = \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)$.

(β) Αν $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 1)$ και $f(x, y, z) = g\left(\frac{2z}{x^2 + y^2 + 1}\right)$, όπου $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$, $\vec{r}'(t) \perp \nabla f(\vec{r}(t))$.

Θέμα 5. (i) Εστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) = 2x^3 - 6x^2 - 3y^2 - 6xy$.

(α) Βρείτε και ταξινομήστε τα στάσιμα σημεία της f . (β) Δείξτε ότι η f δεν έχει ολικά ακρότατα.

(ii) Εστω $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$ και $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$.

(α) Βρείτε τα σημεία της S στα οποία η f παρουσιάζει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

(β) Βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων επιπέδων της S στα σημεία αυτά και δείξτε ότι είναι παράλληλα μεταξύ τους.