

Θέμα 1. (i) Εξετάστε ως προς τη σημειακή και ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων:

$$(α) f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f_n(x) = \frac{\sin x}{n}$$

$$(β) f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f_n(x) = 0 \text{ αν } x < n \text{ και } f_n(x) = 1, \text{ αν } x \geq n.$$

$$(ii) \text{ Δίνεται } \eta \text{ σειρά } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{2^n}, x \in \mathbb{R}. \text{ Δείξτε ότι}$$

(α) Η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση f .

(β) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη. Δώστε υπό μορφή σειράς την f' .

Θέμα 2. (i) (α) Έστω $R > 0$ και $f : (-R, R) \rightarrow \mathbb{R}$ με παραγώγους οποιασδήποτε τάξης στο σημείο $\xi = 0$. Δώστε τη σειρά Taylor της f με κέντρο το $\xi = 0$.

(β) Έστω $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ με ακτίνα σύγκλισης $R > 0$. Δείξτε ότι η σειρά Taylor της f με κέντρο το $\xi = 0$ ταυτίζεται με την f .

(ii) Δώστε την σειρά Taylor της $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ με κέντρο το σημείο $\xi = 0$ και δείξτε ότι η σειρά αυτή συγκλίνει σημειακά στην f .

Θέμα 3. (i) (α) Διατυπώστε τον ορισμό της σύγκλισης μιας ακολουθίας $(a_n)_n$ στον \mathbb{R}^k σε ένα σημείο a_0 του \mathbb{R}^k .

(β) Δίνεται μια ακολουθία $(a_n)_n$ στον \mathbb{R}^2 και $a_0 \in \mathbb{R}^2$. Αν $a_n = (x_n, y_n)$ και $a_0 = (x_0, y_0)$ δείξτε ότι η $(a_n)_n$ συγκλίνει στο a_0 αν και μόνο αν οι $(x_n)_n$ και $(y_n)_n$ συγκλίνουν στα x_0 και y_0 αντίστοιχα.

(ii) Εξετάστε ως προς την ύπαρξη τα παρακάτω όρια:

$$(α) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (β) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

(iii) Δίνεται η καμπύλη $r(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$ του \mathbb{R}^2 με $t \in \mathbb{R}$. Βρείτε το $r'(t)$ και δείξτε ότι το $r'(t)$ είναι κάθετο στο $r(t)$ για όλα τα $t \in \mathbb{R}$. Ποιό είναι το ίχνος της καμπύλης $r(t)$;

Θέμα 4. (i) (α) Διατυπώστε τον ορισμό της παραγώγου $Df(x_0)$ μιας συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ σε ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

(β) Δείξτε ότι αν $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ είναι γραμμική συνάρτηση, τότε είναι παραγωγίσιμη και $Df(\mathbf{x}) = f$ για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{αν } (x, y) \neq (0, 0)$$

και $f(0, 0) = 0$. Δείξτε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

Θέμα 5. (i) (α) Δίνεται μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, ε ένα μοναδιαίο διάνυσμα του \mathbb{R}^n και $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Δώστε τον ορισμό της παραγώγου της f στο \mathbf{x}_0 κατά την κατεύθυνση \mathbf{e} .

(β) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y, z) = x^2 + y + e^z$. Δείξτε ότι η f είναι διαφορίσιμη και υπολογίστε την παράγωγο της f στο $(1, 1, 0)$ κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)$.

(ii) (α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) = x^2 - y^2$ δεν έχει τοπικά ακρότατα.

(β) Βρείτε τα ακρότατα της $f(x, y, z) = x + z$ στην επιφάνεια της σφαίρας $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.