

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΕΙΟ ΠΟΛYTEΧΝΕΙΟ

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΙΙ 29/6/2004

Διδάσκοντες Α. Αρβανιτάκης, Β. Κανελλόπουλος

Τμήματα Α-Γ

Θέμα 1. Έστω  $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$  και  $f, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

(i) Διατυπώστε τον ορισμό καθώς και ένα χριτήριο της ομοιόμορφης σύγκλισης της ωκολουθίας  $(f_n)_n$  στην  $f$ .

(ii) Έστω  $x_0 \in X$  και  $f_n$  συνεχής στο  $x_0$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Αν η  $(f_n)_n$  συγκλίνει ομοιόμορφα στην  $f$  δείξτε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .

(iii) Διατυπώστε τον ορισμό καθώς και το χριτήριο Weierstrass για την ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ .

(iv) Εξετάστε ως προς τη σημειακή καθώς ως προς και την ομοιόμορφη σύγκλιση τις παρακάτω ωκολουθίες και σειρές συναρτήσεων:

$$(α) f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^n, \quad (β) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}.$$

Θέμα 2. α. Δίνεται η συνάρτηση  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

(i) Αναπτύξτε την  $f$  σε δυναμοσειρά κέντρου  $\xi = 0$ .

(Δίνεται ότι  $\sum_{n=0}^{\infty} y^n = 1 + y + y^2 + \dots = \frac{1}{1-y}$  για κάθε  $y \in (-1, 1)$ ).

(ii) Με βάση το (i), βρείτε τα αναπτύγματα κέντρου  $\xi = 0$ , τών παρακάτω συναρτήσεων :

(α) Της παραγώγου  $f'$  της  $f$  και

(β) Της συνάρτησης  $F : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  για κάθε  $x \in (-1, 1)$ .

(iii) Δείξτε ότι

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

β. Έστω  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x, y, z) = xyz$  και  $x_0 = (1, 2, 3)$ . Βρείτε το μοναδιαίο διάνυσμα ε για το οποίο η παράγωγος της  $f$  στο  $x_0$  κατά την κατεύθυνση ε γίνεται μέγιστη. (Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας)

Θέμα 3. α. Έστω  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  και  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  διαφορίσιμες συναρτήσεις. Θέτουμε  $F = g \circ f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Δείξτε ότι τα διανύσματα του  $\mathbb{R}^2$ ,  $\nabla F(x, y)$  και  $\nabla f(x, y)$  είναι παράλληλα.

β. Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(0, 0) = 0$  και

$$f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2} \quad \text{αν } (x, y) \neq (0, 0)$$

(i) Δείξτε ότι  $|f(x, y)| \leq |x|$  για κάθε  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

(ii) Δείξτε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $(0, 0)$ .

(iii) Βρείτε τις  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  και  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ .

(iv) Δείξτε ότι η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, 0)$ .

**Θέμα 4.** (i) Δείξτε ότι η συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x, y) = x^2 - y^2 + xy$  έχει  
ένα στάσιμο σημείο το οποίο είναι σελλοειδές.

(ii) Βρείτε τα ακρότατα της  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x, y, z) = 2x + y - z$  πάνω στη  
σφαίρα  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ .

**Θέμα 5.** (i) Έστω  $f : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$  φθινουσα θετική συνάρτηση, τέτοια ώστε  
το γενικευμένο ολοκλήρωμα  $\int_0^\infty f(t)dt$  συγκλίνει στο  $\mathbb{R}$ . Δείξτε ότι:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^{2x} f(t)dt = 0.$$

$$(\beta) \text{ Για κάθε } x \in \mathbb{R}, 0 \leq xf(x) \leq \int_x^{2x} f(t)dt.$$

$$(\gamma) \text{ Συμπεράνετε ότι } \lim_{x \rightarrow \infty} xf(x) = 0.$$

(ii) Έστω  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  διαφορίσιμη και  $D$  ο μοναδιαίος δίσκος του  $\mathbb{R}^2$ . Υποθέτουμε  
ότι η  $f$  στο σύνορο του  $D$  είναι σταθερή. Αποδείξτε ότι υπάρχει εσωτερικό σημείο  $x_0$   
του  $D$  ώστε το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας  $z = f(x)$  στο  $x_0$  είναι παράλληλο  
στο επίπεδο  $xOy$ . (Θεωρείστε δεδομένο ότι ο περιορισμός της  $f$  στο  $D$  λαμβάνει  
μέγιστη και ελάχιστη τιμή).

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!