



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών  
Επιστημών  
ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ  
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ

Ανάλυση ΙΙ

Σεπτέμβριος 2006,

Θέμα 1. A. Εξετάστε ως προς την χατά σημείο καθώς και ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση τις παρακάτω ακολουθίες και σειρές συναρτήσεων:

$$f_n(x) = x^n, x \in [0, 1], \quad f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}, x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, x \in \mathbb{R}.$$

B. (i). Αναπτύξτε τη συνάρτηση  $f(x) = \ln(1+x)$ ,  $x \in (-1, 1)$  σε δυναμοσειρά με κέντρο το 0.  
(ii). Για τη δυναμοσειρά που βρήκατε στο (i), να βρεθούν η ακτίνα σύγκλισης καθώς και το ακριβές διάστημα σύγκλισής της.

(iii). Δικαιολογήστε ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα  $[0, 1]$ , καθώς και ότι

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Θέμα 2. A. Έστω  $f : [0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$  μη αρνητική συνάρτηση.  $\int_0^{+\infty} f(x) dx / \int_0^{+\infty} 1 dx < \infty$  και  $\int_0^{+\infty} f(x) dx < \infty$ .

- (i). Αν υπάρχουν  $m > 0$  και  $c > 0$  ώστε  $m \leq f(x)$ , για όλα τα  $x \in [c, +\infty]$ , δείξτε ότι  $\int_c^{+\infty} f(x) dx = +\infty$  και συμπεράνετε ότι  $\int_0^{+\infty} f(x) dx = +\infty$ .  
(ii). Αν το  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  υπάρχει και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ , δείξτε ότι  $l = 0$ .  
(iii). Υπολογίστε τα γενικευμένα ολοκληρώματα:

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x^2 + 1} dx, \quad \int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}.$$

B. Να εξεταστούν ως προς την ύπαρξη τα ακόλουθα όρια και αν υπάρχουν να υπολογιστούν:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2 + y^2}{z}.$$

Θέμα 3. A. Η διαφορίσιμη συνάρτηση  $T(x, y)$ , δίνει τη θερμοκρασία στο σημείο  $(x, y)$ . Υποθέτουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής της  $T(x, y)$  στο  $(1, 1)$  είναι 3 προς την κατεύθυνση  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$  και 4 προς την κατεύθυνση  $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ .

- (i). Βρείτε την κατεύθυνση προς την οποία η θερμοκρασία αυξάνει ταχύτερα.  
(ii). Υπολογίστε προσεγγιστικά με τη βοήθεια του εφαπτόμενου επίπεδου, την τιμή  $T(1.01, 1.02)$ , διάνυσμα στο τυχόν  $(x_0, y_0)$  (αντίστοιχα  $(x_0, y_0, z_0)$ ) αυτών.

B: Να βρεθούν οι ισοσταθμικές καμπύλες της συνάρτησης  $f(x, y) = e^{x^2+4y^2}$  καθώς και οι ισοσταθμικές επιφάνειες της συνάρτησης  $g(x, y, z) = e^{x+y-z}$ . Να βρεθεί επίσης ένα κάθετο διάνυσμα στο τυχόν  $(x_0, y_0)$  (αντίστοιχα  $(x_0, y_0, z_0)$ ) αυτών.

Θέμα 4. A. Να μελετηθεί ως προς τα στάσιμα σημεία και τα τοπικά αφρότατα η συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4$ .

B. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x, y) = x^2 - y^2$  και ο μοναδιαίος κύκλος του  $\mathbb{R}^2$ ,

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Βρείτε τα σημεία του  $S$  όπου η  $f|_S$  λαμβάνει μέγιστη καθώς και τα σημεία όπου λαμβάνει ελάχιστη τιμή.

Η εξέταση διαρκεί 3 ώρες.  
Καλή επιτυχία.