

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ/2^ο Εξάμηνο

12-9-2006

ΘΕΜΑ 1 (Μονάδες 2)

Για κάθε ορθομοναδιαίο ή ορθογώνιο μετασχηματισμό (πίνακα), να αποδείξετε ότι:

- (α) Οι ιδιοτιμές του έχουν μέτρο 1. (1μ)
 (β) Δύο ιδιοδιανύσματά του που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνια. (1μ)

ΘΕΜΑ 2 (Μονάδες 3)

Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2-a & a & a-3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

- (i) Βρείτε τις τιμές του a για τις οποίες δεν διαγωνοποιείται. (1μ)

- (ii) Για $a = 0$, βρείτε τον ελάχιστο ακέραιο κ ώστε ο πίνακας $A + \kappa I$ να έχει όλες τις ιδιοτιμές του θετικές. Ειδικά, για $a = 0$ και $\kappa = 2$, να εκφράσετε τον πίνακα B^4 , όπου $B = A + 2I$, ως γραμμικό συνδυασμό των πινάκων I, B, B^2 . (2μ)

Θέμα 3 (Μονάδες 3)

(A) Δίνεται ο συμμετρικός πίνακας $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

- (α) Να προσδιορίσετε ορθογώνιο πίνακα P που διαγωνοποιεί τον πίνακα A . (1μ)

- (β) Να προσδιορίσετε πίνακα X με την ιδιότητα $X^2 = A$. (1μ)

- (B) Να προσδιορίσετε το είδος της καμπύλης με εξίσωση: $2xy - 1 = 0$, καθώς και την εξίσωσή της ως προς τους κύριους άξονες της. (1μ)

ΘΕΜΑ 4 (Μονάδες 3)

Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$.

- (α) Να βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο $\mu_A(\lambda)$. (1μ)

- (β) Να αποδείξετε ότι :

$$A^{-2} = \frac{1}{12}I - \frac{1}{108}A \quad \text{και} \quad A^3 = 27(A + 2I) . \quad (1μ)$$

- (γ) Να βρείτε τις ιδιοτιμές των πινάκων A^{-1} και $adj A$. (1μ)

Θέμα 5 (Μονάδες 2)

Έστω ότι ο 11×11 πίνακας

$$A = diag \left(\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, [-2], \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, [1], [2], [3] \right).$$

Να βρείτε :

- (α) τις ιδιοτιμές του A και την αλγεβρική τους πολλαπλότητα, (0,5μ)
- (β) τη γεωμετρική πολλαπλότητα των ιδιοτιμών, (0,5μ)
- (γ) το ελάχιστο πολυώνυμο του A και (0,5μ)
- (δ) τον πίνακα $B = (A + 2I)^3(A - I)^2(A - 2I)(A - 3I)^2$. (0,5μ)

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

Καλή επιτυχία