

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**
ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ
Σεπτέμβριος 2003

ΘΕΜΑ 1^ο (Μονάδες 3)

I. Να αποδείξετε ότι η σχέση

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^T)$$

ορίζει ένα πραγματικό εσωτερικό γινόμενο στο διανυσματικό χώρο των 3×3 πραγματικών πινάκων.

II. Στον Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^3 , ως προς το κανονικό εσωτερικό γινόμενο, να βρείτε μία ορθοκανονική βάση του ορθογώνιου συμπληρώματος του υπόχωρου

$$A = \{(x, y, z) : x + y - z = 0, y + z = 0\}.$$

ΘΕΜΑ 2^ο (Μονάδες 3,5)

I. Δίνεται ο μη μηδενικός πραγματικός $n \times 1$ πίνακας-στήλη X . Να αποδείξετε ότι ο πίνακας $A = XX^T$ έχει ως ιδιοτιμές το 0 με γεωμετρική πολλαπλότητα $n-1$ και τον αριθμό $X^T X$. Στη συνέχεια να γράψετε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(t)$ του A .

II. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. Να βρείτε την κανονική μορφή Jordan καθώς

και μία βάση Jordan του A .

ΘΕΜΑ 3^ο (Μονάδες 3,5)

I. Αν A είναι ένας πραγματικός $n \times n$ πίνακας και λ είναι μία ιδιοτιμή του με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το x , να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\lambda + \kappa$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα $A + \kappa I$ με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το x , όπου I είναι ο $n \times n$ μοναδιαίος πίνακας.

II. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Να βρεθεί ο ελάχιστος ακέραιος κ για τον οποίο ο πίνακας $A + \kappa I$ έχει όλες τις ιδιοτιμές του θετικές.

2. Να αποδείξετε ότι $A^{-1} = \frac{1}{18}(A - 3I)$.

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες
Καλή επιτυχία.