

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Αν ο αριθμός $\lambda \neq 0$ είναι ιδιοτιμή του αντιστρέψιμου πίνακα A , να αποδείξετε ότι ο αριθμός λ^{-1} είναι ιδιοτιμή του πίνακα A^{-1} .

B. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -6 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Να βρείτε αντιστρέψιμο πίνακα P που να διαγωνοποιεί τον πίνακα A .

(b) Να προσδιορίσετε πίνακα X που να ικανοποιεί την εξίσωση $X^2 = A$.

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Έστω V χώρος εσωτερικού γινομένου πάνω στο σώμα $K = \mathbb{R}$ ή \mathbb{C} και $T: V \rightarrow V$ αυτοσυζυγής (ερμιτιανός ή συμμετρικός) γραμμικός μετασχηματισμός. Να αποδείξετε ότι:

(i) Οι ιδιοτιμές του T είναι πραγματικές

(ii) Δύο ιδιοδιανύσματα του T που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνια.

B. Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο \mathbb{C}^3 με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο και το γραμμικό μετασχηματισμό

$$T(x, y, z) = (ix + (2+3i)y, 3x + (3-i)z, (2-5i)y + iz).$$

Να βρείτε το συζυγή μετασχηματισμό T' του T .

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω A ένας 7×7 πίνακας με στοιχεία στο σώμα $K = \mathbb{R}$ ή \mathbb{C} , ο οποίος έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(\lambda) = (\lambda^2 + 4)(\lambda + 1)^5$ και ελάχιστο πολυώνυμο

$$m_A(\lambda) = (\lambda^2 + 4)(\lambda + 1)^3.$$

(a) Να βρείτε τις πιθανές ρητές κανονικές μορφές του A , αν $K = \mathbb{R}$.

(b) Να βρείτε τις πιθανές κανονικές μορφές Jordan του A , αν $K = \mathbb{C}$.

(γ) Να υπολογίσετε τον πίνακα A^{-1} , αν υπάρχει, ως πολυώνυμο του A .

ΘΕΜΑ 4^ο

Χρησιμοποιώντας τους κατάλληλους μετασχηματισμούς μεταφοράς και στροφής, να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης

$$2x^2 - y^2 + 4xy + 8x + 2y - 1 = 0$$

ως προς τους κύριους άξονές της.