

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ/2^ο Εξάμηνο**

13-6-2005

Να απαντήσετε σε 4 από τα παρακάτω θέματα

ΘΕΜΑ 1^ο

- Α. Έστω V Ευκλείδειος χώρος και $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ μία ορθοκανονική βάση του. Αν $w \in V$, να αποδείξετε ότι

$$w = \sum_{i=1}^n (w|v_i)v_i,$$

όπου $(w|v_i)$ είναι το εσωτερικό γινόμενο $w \circ v_i$.

Μονάδες 0,5

- Β. Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^3 με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο και τον υπόχωρο του $U = \{(x, y, z) : x + y + z = 0, x = 0\}$. Να προσδιορίσετε

- (α) μία ορθοκανονική βάση του ορθογώνιου συμπληρώματος U^\perp και
 (β) την προβολή του διανύσματος $u = (1, 2, -3)$ πάνω στον υπόχωρο U^\perp . $(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

- Α. Να αποδείξετε ότι κάθε ιδιοτιμή ενός πίνακα A είναι ρίζα του ελάχιστου πολυωνύμου του.

Μονάδες 0,5

- Β. Να βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και μετά να υπολογίσετε τον πίνακα

$$S = I + A + A^2 + \dots + A^{2005} \rightsquigarrow A^2 = I$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 3^ο

- Έστω ότι ο 10×10 πίνακας A έχει κανονική μορφή Jordan

$$J = diag \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, [2], [3], [3] \right)$$

$r^5 p^3 n^2$

Να βρείτε :

- (α) τις ιδιοτιμές του A και την αλγεβρική τους πολλαπλότητα, $(1, 2, 3)$

- (β) τη γεωμετρική πολλαπλότητα των ιδιοτιμών, 2

- (γ) το ελάχιστο πολυώνυμο του A και $(1-1)^2 (1-2) (1-3)$

- (δ) τον πίνακα $B = (A - I)^4 (A - 2I)^5 (A - 3I)^2 = \bigcirc$

Μονάδες 2,5

ΘΕΜΑ 4^ο

- A. Να βρεθεί 2×2 ορθογώνιος πίνακας P του οποίου η πρώτη γραμμή είναι διάνυσμα συγγραμμικό προς το διάνυσμα $u = (1, -2)$

Μονάδες 0,5

- B. Να προσδιορίσετε το είδος της επιφάνειας

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 2xy + 2xz - 2yz - 54 = 0$$

καθώς και την εξίσωσή της ως προς τους κύριους άξονες της.

Μονάδες 2**ΘΕΜΑ 5^ο**

Έστω ο 3×3 ορθογώνιος πίνακας A . Να αποδείξετε ότι :

- ✓(α) αν ο λ είναι ιδιοτιμή του A , τότε και ο λ^{-1} είναι επίσης ιδιοτιμή του A ,

Μονάδες 0,5

- (β) αν $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)[\lambda^2 - 2(\cos \theta)\lambda + 1]$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A και x ιδιοδιάνυσμά του αντίστοιχο της ιδιοτιμής $\lambda = 1$, τότε ο πίνακας $B = A^2 - 2(\cos \theta)A + I$ έχει ιδιοδιανύσματα το x αντίστοιχο της ιδιοτιμής $\lambda = 2(1 - \cos \theta)$ και το w , όπου $w \circ x = 0$, αντίστοιχο της ιδιοτιμής $\lambda = 0$.

Μονάδες 2

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

Καλή επιτυχία