



**Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο**  
**Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών**  
**Επιστημών**  
**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι**  
**ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ...Μιχαήλ...Καλοθερά...κωδ...**

**Θέμα 1** (α) Έστω  $A, B$  δύο μη κενά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών με  $A \subseteq B$  και  $B$  άνω φραγμένο. Υποθέτουμε ότι ισχύει η εξής συνθήκη: Για κάθε  $\beta \in B$ , υπάρχει  $\alpha \in A$  τέτοιο, ώστε  $\beta \leq \alpha$ . Δείξτε ότι  $\sup A = \sup B$ .

(β) Να βρεθούν τα όρια: (i)  $\lim_{v \rightarrow +\infty} 5^v$ , (ii)  $\lim_{v \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{2v^2}$ , (iii)  $\lim_{v \rightarrow +\infty} \sqrt{3v^4 + 2v + 1}$ .

**Θέμα 2** (α) Έστω  $(\alpha_n), (\beta_n)$  δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών του  $[0, 1]$  για τις οποίες ισχύει  $0 < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \alpha_3 < \beta_3 < \dots < 1$ . Δείξτε ότι η σειρά  $\sum_{v=1}^{+\infty} (\beta_v - \alpha_v)$  συγκλίνει.

(Υπόδειξη : Δείξτε επαγωγικά ότι για κάθε  $k$  ισχύει  $\sum_{v=1}^k (\beta_v - \alpha_v) \leq \beta_k - \alpha_1$ ).

(β) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές : (i)  $\sum_{v=1}^{+\infty} \frac{1}{v^2}$ , (ii)  $\sum_{v=1}^{+\infty} \frac{v!}{v^v}$ .

**Θέμα 3** (α) Έστω  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I = \text{διάστημα}$ . (i) Αν η  $f$  ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz στο  $I$ , δείξτε ότι η  $f$  είναι ομοιόμορφα συνεχής στο  $I$ . (ii) Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $I$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό  $\overset{\circ}{I}$  του  $I$  και υπάρχει  $M > 0$  τέτοιο, ώστε  $|f'(x)| \leq M, \forall x \in \overset{\circ}{I}$ , δείξτε ότι η  $f$  ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz στο  $I$ .

(β) Με χρήση των ιδιοτήτων των ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων εξετάστε ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια τις ακόλουθες συναρτήσεις στα αντίστοιχα σύνολα που ορίζονται:

(i)  $f(x) = \sin x + \text{Arc tan } x, x \in \mathbb{R}$ , (ii)  $g(x) = x + \sqrt{x}, x \in [0, 1]$ , (iii)  $h(x) = \left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}, x \in (0, 1]$ .

**Θέμα 4** Δίδεται η συνάρτηση  $f: f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}, & x \in [0, 1] \\ \frac{1}{4} + \ln x, & x \in (1, e] \end{cases}$  και έστω η συνάρτηση

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

(α) Με χρήση των ιδιοτήτων της  $F$  υπολογίστε τα όρια  $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x)$  και την παράγωγο  $F'(1)$ . Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

(β) Υπολογίστε την τιμή  $F(e)$ .

**Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες.**  
**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**