

**ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ
ΠΕΡΙΟΔΟΥ 2006**

**ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: ΘΕΜΙΣΤΟΚΛΗΣ ΡΑΣΣΙΑΣ-ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΤΣΕΚΡΕΚΟΣ
-ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ ΑΡΒΑΝΙΤΑΚΗΣ (ΤΜΗΜΑΤΑ Ι, ΙΙ ΚΑΙ ΙΙΙ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ)**

Ζήτημα 1. (α). Να δειχτεί ότι $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$. Υπολογίστε το όριο της ακολουθίας $a_n = \sqrt[n]{n^2 + 2n + 7}$.

(β). Δίνεται η ακολουθία $(a_n)_n$ με $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, $n \in \mathbb{N}$ και $a_1 = \sqrt{2}$. Βρείτε το $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ και χατόπιν υπολογίστε το $\sup A$ και $\inf A$ αν $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Ζήτημα 2. (α) Δείξτε ότι αν η σειρά $\sum a_n$ συγχλίνει στο \mathbb{R} , τότε $a_n \rightarrow 0$.

(β) Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές:

$$\begin{array}{ll} (\text{i}) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n & (\text{ii}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n} + 7\sqrt{n}} \\ (\text{iii}) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} & (\text{iv}) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2}{n^4 + 2} \end{array}$$

Ζήτημα 3. (α) Αν $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, εξετάστε αν υπάρχει το όριο της $f(x)$ στο 0.

(β) Δίνεται η συνάρτηση $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Εξετάστε την h ως προς τη συνέχεια στο \mathbb{R} .

(γ). Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$, μια συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b]$.

Ζήτημα 4. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

(α) $\int \frac{dx}{2+\cos x}$ (Θέστε $t = \tan \frac{x}{2}$).

(β) $\int (\ln x + \frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1}) dx$.

Η ΕΞΕΤΑΣΗ ΔΙΑΡΚΕΙ 3 ΩΡΕΣ.
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!!