



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
 Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών
 Επιστημών
 ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι
 ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ.....

✗ Να βρεθεί το supremum και το infimum των συνόλων $A, B, A+B$, όπου,

$$A = \{\alpha_n, n \in \mathbb{N}, \alpha_1 = 1, \alpha_{n+1} = \sqrt{2 + \alpha_n}\}, B = \left\{ \arcsin x : x \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \right\}.$$

✗ Δικαιολογήστε τις απαντήσεις.

✗ Αν $\alpha_n \rightarrow \alpha \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι $\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n} \rightarrow \alpha$.

✗ Έστω $\alpha \in \mathbb{R}, |\alpha| < 1$. Δείξτε ότι $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}$. Δείξτε επίσης ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \alpha_{n+1}) = \alpha_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \text{ και } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + n^2 + 3n + 2}{3^{n+1} (n+1)(n+2)} = \frac{5}{6}.$$

$\alpha^n \in [0, 1] \text{ με } |\alpha| < 1$

4. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές, (i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n - \ln n}$, (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2}{n!}$.

✗ Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = (1+x^2)e^x$ είναι κοίλη στο διάστημα $(-3, -1)$. Δείξτε ότι στο διάστημα αυτό ισχύει η ανισότητα $(1+x^2)e^x \leq e^{-2}(x+7)$.

✗ Έστω $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, I = \text{διάστημα}$, συνεχής στο I και παραγωγίσιμη στο

εσωτερικό \dot{I} του I . Δείξτε ότι η f ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz στο $I \Leftrightarrow$ η παράγωγος

f' είναι φραγμένη στο \dot{I} . Ικανοποιεί η $f(x) = \sqrt{x}$ τη συνθήκη Lipschitz στο $(0, 1)$; Είναι η f ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, 1)$;

7. Εξετάστε ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια τις επόμενες συναρτήσεις στα αντίστοιχα σύνολα., (i) $g(x) = \arctan x, x \in \mathbb{R}$, (ii) $h(x) = (\tan x)^x, x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

✗ Αναπτύξτε τη συνάρτηση $f(x) = (x+2)^2$ σε άθροισμα δυνάμεων του $(x-1)$. Στη συνέχεια για τυχόντα $\varepsilon > 0$, προσδιορίστε $\delta(\varepsilon) \in \mathbb{R}, 0 < \delta(\varepsilon) < 1$, τέτοιον ώστε όταν $|x-1| < \delta(\varepsilon)$ να ισχύει $|f(x) - f(1)| < \varepsilon$.

✗ Βρείτε τα σημεία ασυνέχειας της $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ στο πεδίο ορισμού της.

Είναι η συνάρτηση αυτή ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[a, \beta] \subseteq \mathbb{R}$;

✗ (i) Υπολογίστε με τη βοήθεια διαμερίσεων το ολοκλήρωμα $\int_a^b e^x dx, a, \beta \in \mathbb{R}, a < \beta$.

(ii) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα, $\int (\ln x)^3 dx$.

ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΤΕ ΣΕ ΟΚΤΩ (8) ΑΠΟ ΤΑ ΔΕΚΑ (10) ΘΕΜΑΤΑ
 ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ 3 ΩΡΕΣ
 ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ