



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών
Επιστημών
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ I.
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ.....

Ανάλυση I

Σεπτέμβριος 2006

Θέμα 1. A. Να βρεθούν τα $\sup A$, $\inf A$, όπου

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}, a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}\}.$$

B. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι ακολουθίες με γενικούς όρους

$$\checkmark a_n = \sqrt[n]{\ln n} \quad b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Θέμα 2. A. Δίνεται $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, και ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ του διαστήματος $[0, 1]$ ώστε το $\lim_n f(x_n)$ υπάρχει και είναι ίσο με $\ell \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$ ώστε $f(x_0) = \ell$.

B. Να εξεταστούν ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια οι ακόλουθες συναρτήσεις:

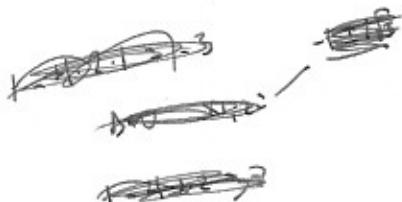
- (i) $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $f(x) = \frac{1}{x}$.
- (ii) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $f(x) = x + 1$.
- (iii) $f : (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $g(x) = (\tan x)^x$.

Θέμα 3. A. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$\tan \frac{x}{2} = \omega \quad I_1 = \int \frac{dx}{\cos x}. \quad I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 + 6x + 2}}. \quad \Delta < 0 \quad \text{με } \omega^2$$

B. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές:

$$(i) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{4n}\right)^{-n^2}.$$



Η εξέταση διαρκεί 2.5 ώρες.
Καλή επιτυχία.