ΣΧΟΛΗ: Ε.Μ.Φ.Ε. **Σεπτέμβριος 2014**

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Θέμα 1 (2.5 μονάδες)

Τα ερωτήματα 1 και 2 δε σχετίζονται μεταξύ τους.

1. Οι εταιρείες ασφάλισης αυτοκινήτων κατατάσσουν τους οδηγούς σε 3 κατηγορίες ανάλογα με την πιθανότητα που έχουν να προκαλέσουν δυστύχημα. Έστω ότι η πιθανότητα ένας οδηγός της κατηγορίας κ να έχει ένα τουλάχιστον δυστύχημα είναι κ/13, κ=1,...,3. Ας θεωρήσουμε μία ασφαλιστική εταιρεία στην οποία το κ/6 των οδηγών που ασφαλίζει ανήκουν στην κατηγορία κ, κ=1,...,3. Αν ένας οδηγός ασφαλισμένος στην εταιρεία αυτή αναφέρει ένα τουλάχιστον δυστύχημα σε ένα δωδεκάμηνο ποια είναι η πιθανότητα να ανήκει στην κατηγορία 2?

2. Ένα κουτί περιέχει τέσσερεις άσπρες και δύο μαύρες μπάλες. Δύο από τος μπάλες επιλέγονται χωρίς επανάθεση. Εστω το γεγονός A={η πρώτη μπάλα είναι άσπρη} και το γεγονός B={τουλάχιστον μία μπάλα είναι άσπρη}. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(A\cap B), P(A\cap B^c), P(A^c\cap B^c), P(A|B^c), P(B|A^c)$.

Θέμα 2 (2.5 μονάδες)

Μια δεξαμενή έχει ύψος 30 εκατοστά. Έστω ότι αρχικά η δεξαμενή είναι άδεια. Κάθε φορά που βρέχει η στάθμη του νερού μέσα στη δεξαμενή ανεβαίνει κατά X (cm), όπου X τ.μ. με σ.π.π.

$$f(x)=1, \quad 0\le x\le 1.$$

Το πόσο ανεβαίνει η στάθμη κάθε φορά που βρέχει είναι ανεξάρτητο από τις άλλες φορές.

(α) Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X.

(β) Να βρεθεί η αναμενόμενη αύξηση της στάθμης της δεξαμενής κάθε φορά που βρέχει καθώς και η αναμενόμενη αύξηση της στάθμης του νερού μετά από 50 βροχές.

(γ) Να βρεθεί η πιθανότητα $P(8X^2+1<3)$.

(δ) Ποια η πιθανότητα να μη γεμίσει η δεξαμενή μετά από 50 βροχές?

Θέμα 3 (2.5 μονάδες)

Έστω $X_1,\ldots,X_n$ τυχαίο δείγμα από κάποιο πληθυσμό με σ.π.π.

$$f(x,\theta)=\frac{1}{\theta}x^{\frac{1-\theta}{\theta}}, 0<x<1, \theta>0.$$

(α) Να βρεθεί ΕΜΠ του θ , (β) Να βρεθεί ΕΜΠ της μέσης τιμής των $X_1,\ldots,X_n$.

(γ) Να βρεθεί ροποεκτιμήτρια του θ. Τι παρατηρείτε?

Θέμα 4. (2.5 μονάδες)

Η ποσότητα μιας ουσίας (σε mg) που υπάρχει σε ένα φάρμακο που παράγεται από μία φαρμακευτική εταιρεία A ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο μ_1 και διασπορά σ^2. Ομοίως η ποσότητα της ίδιας ουσίας που υπάρχει σε ένα φάρμακο που παράγεται από μία φαρμακευτική εταιρεία B (ανεξάρτητη από την A) ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο μ_2 και διασπορά σ^2. Με βάση τα παρακάτω δεδομένα:

A	7	9	14	16	10	11	10
B	7	12	6	13	9	8	8

(α) Να κατασκευαστεί ένα 98% διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά των μέσων ποσοτήτων της ουσίας που περιέχονται στα φάρμακα των εταιρειών A και B.

(β) Να ελεγχθεί σε α=5% αν ο μέσος μ_1 υπερβαίνει τα 9mg. Αν το επίπεδο σημαντικότητας α αλλάξει σε 1% τι απόφαση θα πάρουμε?

Διωνυμικη $f(x)=\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}, x=0,1,...,n$	$E(X)=np,\ Var(X)=np(1-p)$
Γεωμετρικη $f(x)=p(1-p)^{x-1},\ x=1,2,...$	$E(X)=\frac{1}{p},\ Var(X)=\frac{1-p}{(p)^2}$
Poisson $f(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!},\ x=0,1,...$	$E(X)=\lambda,\ Var(X)=\lambda$
Κανονικη $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ x\in R$	$E(X)=\mu,\ Var(X)=\sigma^2$
Γαμμα $f(x)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{a-1}e^{-\beta x},\ x>0$ $\Gamma(\alpha)=(a-1)!$ για $\alpha\in Z$	$E(X)=\frac{\alpha}{\beta},\ Var(X)=\frac{\alpha}{\beta^2}$
Εκθετικη $f(x)=\lambda e^{-\lambda x},\ x>0$	$E(X)=\frac{1}{\lambda},\ Var(X)=\frac{1}{\lambda^2}$

Δίνεται ότι:
Φ(1.96)=0.975, Φ(2.33)=0.990, Φ(1.645)=0.95, Φ(1.29)=0.90
Φ(2.5)=0.993, Φ(1.5)=0.933, Φ(3.99)=0.999, Φ(2.055)=0.980,
Φ(2.44)=0.992, Φ(0.5)=0.691, Φ(0.85)=0.802, Φ(3.46)=0.999

$P(t_{11}>1.796)=0.05, P(t_{14}>2.624)=0.01, P(t_7>2.998)=0.01, P(t_{11}>1.363)=0.1$

$P(t_6>2.447)=0.025, P(t_8>2.896)=0.01, P(t_6>1.943)=0.05, P(t_8>2.306)=0.025$

$P(t_{14}>1.761)=0.05, P(t_{12}>2.179)=0.025, P(t_{14}>2.145)=0.025, P(t_{12}>2.681)=0.01$

$P(t_7>1.895)=0.05, P(t_7>2.365)=0.025, P(t_{12}>1.782)=0.05, P(t_{10}>1.812)=0.05$

$P(\chi_9^2>21.66)=0.01, P(\chi_8^2>20.09)=0.01, P(\chi_5^2>15.09)=0.01, P(\chi_{12}^2>26.22)=0.01$

$P(\chi_6^2>12.59)=0.01, P(\chi_9^2>16.91)=0.05, P(\chi_8^2>15.50)=0.05, P(\chi_{12}^2>21.03)=0.05$
$P(\chi_9^2>2.08)=0.99, P(\chi_8^2>1.64)=0.99, P(\chi_5^2>0.5543)=0.01, P(\chi_{12}^2>26.22)=0.99$

*** Διάρκεια Εξέτασης: 2 ½ ωρες***