Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Μάθημα: Διαφορική Γεωμετρία καμπύλων και επιφανειών - Εξέταση Ιουνίου 2005

Ονοματεπώνυμο:

ΘΕΜΑ 1 :

α) Να δοθούν οι ορισμοί της εξειλιγμένης και της ενειλιγμένης καμπύλης, για μια επίπεδη καμπύλη $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

β) Δίνεται η κυκλική έλικα $\mathbf{r}(t) = (\alpha\cos t, \alpha\sin t, \beta t)$.

1. Να βρεθεί η εφαπτομένη ευθεία ε της έλικας στο σημείο P(t).
2. Να βρεθεί η καμπύλη των σημείων M που είναι τομή της εφαπτομένης ε με το επίπεδο xOy με τη μορφή $\mathbf{s}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ και να γραφεί η $\mathbf{s}(t)$ ως ενειλιγμένη μιας καμπύλης του επιπέδου της.
3. Να βρεθούν η εφαπτομένη, η ακτίνα καμπυλότητας και το κέντρο καμπυλότητας K της $\mathbf{s}(t)$ στο σημείο M.
4. Να γίνει σχήμα στο οποίο να εμφανίζονται όλα τα παραπάνω μαζί.

ΘΕΜΑ 2 :

α) Να εκφραστούν τα διανύσματα $(\mathbf{T}', \mathbf{N}', \mathbf{B}')$ στην βάση που συνιστά το τρίακμο του Frenet $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$.

β) Να υπολογισθούν οι ποσότητες $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}, \kappa, \tau)$ της καμπύλης: $\mathbf{r}(u) = (u - \frac{1}{3}u^3, u^2, u + \frac{1}{3}u^3)$

ΘΕΜΑ 3°. Δίνεται ένα σημείο της $p = (0,1,1)$ απλής επιφάνειας $M = \mathbf{x}(D)$ με

$$\mathbf{x}(u,v) = \big(v\cos u, v\sin u, v\big), \quad (u,v) \in D = (0, 2\pi) \times (\frac{1}{2}, 3).$$

1. Να δειχθεί ότι το σημείο $p = (0,1,1)$ ανήκει στην επιφάνεια και να βρεθεί μια βάση στον εφαπτόμενο χώρο T_pM.
2. Να δειχθεί ότι το διάνυσμα $v = (-3,2,2)$ ανήκει στον T_pM και να βρεθούν οι συνιστώσες του ως προς μια βάση T_pM.
3. Να βρεθεί ο **πίνακας** του τελεστή σχήματος S_p της επιφάνειας στο σημείο p. Στη συνέχεια να βρεθούν οι **κύριες καμπυλότητες**, τα **κύρια διανύσματα**, η **καμπυλότητα Gauss** της επιφάνειας στο σημείο αυτό και να βρεθεί εφαπτόμενο διάνυσμα $w \in T_pM$ ώστε $k(w) = 1$.
4. Γράφοντας την επιφάνεια με τη μορφή $\mathbf{x}(u,v) = (0,0,0) + v\big(\cos u, \sin u, 1\big)$ να αναγνωρίσετε την επιφάνεια και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τα αποτελέσματα του ερωτήματος 3.

ΘΕΜΑ 4°. Δίνεται η φυσική παραμετρική καμπύλη $\beta(u)$ και το σταθερό διάνυσμα δ με $\beta'(u)\cdot\delta = 0, \|\delta\| = 1$.

1. Να γραφεί μια παραμετρική παράσταση $\mathbf{x}(u,v)$ της κυλινδρικής επιφάνειας M με οδηγό καμπύλη την $\beta(u)$ και γενέτειρες παράλληλες προς το δ και να δειχθεί ότι η καμπυλότητα Gauss είναι μηδέν.
2. Να δειχθεί ότι αν $k(u), T(u), N(u)$ είναι η καμπυλότητα, το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα και το πρώτο κάθετο διάνυσμα, αντίστοιχα, της καμπύλης $\beta(u)$ τότε η επιτάχυνση $a''(t)$ μιας καμπύλης $a : I \to M$, $a(t) = \mathbf{x}\big(u(t), v(t)\big), t \in I$ της επιφάνειας γράφεται
$$a''(t) = k(u)u'^2(t)N(u(t)) + u''(t)T(u(t)) + v(t)\delta$$
και να βρεθεί η συνιστώσα της στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας.
3. Να δειχθεί η καμπύλη $a : I \to M$ του προηγουμένου ερωτήματος είναι γεωδαισιακή της επιφάνειας, αν και μόνο αν σχηματίζει σταθερή γωνία με τις γενέτειρες.

<u>Διάρκεια εξέτασης: 3 ωρ</u>

ΘΕΜΑ 1: 1) Εστω $\bar{d} = \alpha \bar{T} + \beta \bar{N} + \gamma \bar{B}$ τότε

$\bar{d} \times \bar{T} = \beta \bar{N} \times \bar{T} + \gamma \bar{B} \times \bar{T} = -\beta \bar{B} + \gamma \bar{N}$. Όμως $\bar{d} \times \bar{T} = \bar{T}' = k\bar{N}$ και αφού $\{\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}\}$ βάση $\Rightarrow$ $\beta = 0$ και $\gamma = k$

Επίσης, $\bar{d} \times \bar{B} = \alpha \bar{T} \times \bar{B} = -\alpha \bar{N}$. Όμως $\bar{d} \times \bar{B} = \bar{B}' = -\tau \bar{N} \Rightarrow \alpha = \tau$

2) $\bar{T}' = k\bar{N}$, $\bar{T}'' = k'\bar{N} + k\bar{N}' = k'\bar{N} + k(-k\bar{T} + \tau\bar{B}) = -k^2\bar{T} + k'\bar{N} + k\tau\bar{B}$

Άρα $\bar{T}' \times \bar{T}'' = k\bar{N} \times (-k^2\bar{T} + k'\bar{N} + k\tau\bar{B}) = k^3\bar{B} + k^2\tau\bar{T} = k^2\bar{d}$

ΘΕΜΑ 2: 1) $\bar{x}_s = \bar{T} + v\bar{d}' = \bar{T} + v(\tau'T + k'B' + \tau \cancel{kN} - k\cancel{\tau N})$

$= (1 + v\tau')\bar{T} + vk'\bar{B}$, $\bar{x}_v = \bar{d} = \tau\bar{T} + k\bar{B}$ Άρα:

$\bar{x}_s \times \bar{x}_v = [(1+v\tau')\bar{T} + vk'\bar{B}] \times [\tau\bar{T} + k\bar{B}] = \ldots = (\tau v k' - k - kv\tau')\bar{N}$

2) Αφού $k' \neq 0$ ($\Rightarrow k \neq 0$ οπότε ακόμα και για $v = 0 \Rightarrow \bar{x}_s \times \bar{x}_v \neq 0$)

3) $\bar{B}' = \bar{T}' \Rightarrow \bar{B}'' = k\bar{N} \Rightarrow \bar{B}'' // \bar{x}_s \times \bar{x}_v \Rightarrow \bar{B}'' // \bar{U} \Rightarrow$ γεωδ.

ΘΕΜΑ 3: 1) $x(u,v) = (v, e^v\cos u, e^v\sin u) = (1, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) \Leftrightarrow v = 1,\ u = -\pi/4$

2) $x_u(0,0) = (0,0,1)$, $x_v(0,0) = (1,1,0) \Rightarrow T_pM = [x_u(0,0), x_v(0,0)]$

$U = x_u \times x_v / \|x_u \times x_v\| = 1/\sqrt{2}(-1,1,0)$. Τότε $v \cdot U = 0 \Rightarrow v \in T_pM$,

$w \cdot U = 1/\sqrt{2} \neq 0 \Rightarrow$ το w δεν εφαπτόμενο. Επίσης $w \cdot x_u = 1 \neq 0 \Rightarrow$ δεν κάθετο.

3) (i) $\nabla_v f = \frac{d}{dt} f(\alpha(t))\Big|_{t=0}$, $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$

$\nabla_{x_u} f = \frac{d}{dt} f(x(t, v_0))\Big|_{t=u_0} = \frac{d}{dt}(f \circ x)(t, v_0)\Big|_{t=v_0} = \frac{\partial(f\circ x)}{\partial u}(u_0, v_0)$

Ομοίως το $\nabla_{x_v} f$

(ii) $\tilde{f}(u,v) = f(x(u,v)) = f(v, e^v\cos u, e^v\sin u) = (e^{2v} - e^{2v} + 1)e^v\cos u$

$= e^v\cos u \Rightarrow \nabla_{x_u} f\Big|_p = \frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = -e^v\sin u\Big|_{(0,0)} = 0$

$\nabla_{x_v} f\Big|_p = \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = e^v\cos u\Big|_{(0,0)} = 1$

$v_p = (1,1,2) = 2x_u(0,0) + x_v(0,0) \Rightarrow$

ΘΕΜΑ 3: 1) $(0,1,1) = (v\cos u, v\sin u, v) \Leftrightarrow u = \pi/2,\ v = 1$

$x_u = (-v\sin u, v\cos u, 0) \Rightarrow x_u(\pi/2, 1) = (-1,0,0)$

$x_v = (\cos u, \sin u, 1) \Rightarrow x_v(\pi/2, 1) = (0,1,1)$

2) $v = (-3,2,2) = 3(-1,0,0) + 2(0,1,1) = 3x_u + 2x_v$

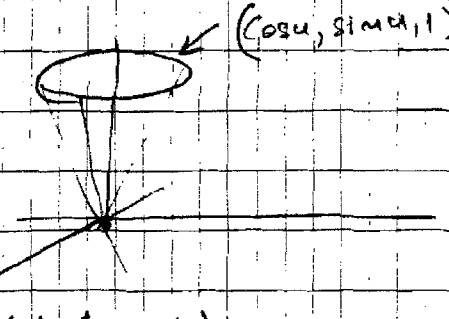
3) $U = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos u, \sin u, -1)$

$$[S] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad k_1 = 0 \qquad K = 0$$

$$k_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad H = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$K(W) = 1$ δεν υπάρχει.

4)



$e_1 = (1,0)$

$e_2 = (0,1)$

$e_1 = 1x_u + 0x_v = (-1,0,0)$

$e_2 = 0x_u + 1x_v = (0,1,1)$

ΘΕΜΑ 4 1) $x(u,v) = \beta(u) + v\delta$

$x_u = \beta'(u),\ x_v = \delta,\ x_{uv} = 0,\ x_{vv} = 0,\ x_{uu} = \beta'' = T = kN$

$\Rightarrow K = 0$

2) $\alpha'(t) = x_u u' + x_v v' = Tu' + \delta v'$

$\alpha''(t) = x_{uu}u'^2 + 2x_{uv}u'v' + x_{vv}v'^2 + x_u u'' + x_v v''$

$= ku'^2 N + Tu'' + \delta v''$

$\alpha''_{tan} = Tu'' + \delta v''$

3) α) Αν α γεωδ. $\Rightarrow \alpha''_{tan} = 0 \Rightarrow u''(t) = v''(t) = 0 \Rightarrow$

$u'(t) = c_1,\ v'(t) = c_2 \Rightarrow \alpha'(t) = Tc_1 + \delta c_2$

$\alpha' \cdot \delta = c_2 = \text{σταθ.}$

β) $\left.\begin{array}{l} \alpha' \cdot \delta = \text{σταθ.} \\ \|\alpha'(t)\| = \text{σταθ.} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha'' \cdot \delta = 0 \\ \alpha'' \cdot \alpha' = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha'' \perp T_{\alpha(t)}M$