Διαφορική Γεωμετρία καμπύλων και επιφανειών
Γραπτή εξέταση Ιουλίου 2004

Να απαντήσετε σε ερωτήματα που υπάρχουν σε τέσσερα μόνο θέματα της επιλογής σας.

ΘΕΜΑ 1: Δίνεται η ομαλή με φυσική παράμετρο καμπύλη $\beta(s), s \in I$ με καμπυλότητα $\kappa(s)$, στρέψη $\tau(s)$ και έστω $\mathbf{d}(s) = \tau(s)\mathbf{T}(s) + \kappa(s)\mathbf{B}(s)$.

1) Να δειχθεί ότι: **1.** $\mathbf{T}' = \mathbf{d} \times \mathbf{T}$, **2.** $\mathbf{N}' = \mathbf{d} \times \mathbf{N}$, 3. $\mathbf{B}' = \mathbf{d} \times \mathbf{B}$, **4.** $\mathbf{d}' = \tau'\mathbf{T} + \kappa'\mathbf{B}$.

2) Θεωρούμε ότι η απεικόνιση $\mathbf{x}(s,v) = \beta(s) + v\mathbf{d}(s)$, $(s,v) \in D$ (ανοικτό) . Να εκφρασθεί το $\mathbf{x}_s \times \mathbf{x}_v$, στη βάση $\{T, N, B\}$.Να να βρεθεί συνθήκη ώστε η $\mathbf{x} : D \to \mathbb{R}^3$ να είναι ομαλή. απλή επιφάνεια $M = \mathbf{x}(D)$ επιφάνεια να είναι είναι ομαλή

3) Να αποδειχθεί ότι το $\mathbf{x}_s \times \mathbf{x}_v$ είναι παράλληλο προς το $\beta''(s)$. Αν η $M = \mathbf{x}(D)$ είναι ομαλή επιφάνεια τι συμπεραίνετε για καμπύλη $\beta(s)$ είναι γεωδαισιακή της επιφάνειας M.

ΘΕΜΑ 2: Δίνεται η απλή επιφάνεια $M = \mathbf{x}(D)$, όπου $\mathbf{x}(u,v) = (v, e^v \cos u, e^v \sin u)$ και $D = (-\pi, \pi) \times \mathbf{R}$.

1) Να αποδειχθεί ότι το σημείο $q = (1, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ ανήκει στην επιφάνεια.

2) Να βρεθεί μια βάση στον εφαπτόμενο χώρο T_pM όπου $p = \mathbf{x}(0,0)$ και να εξετασθεί αν τα διανύσματα $\mathbf{v} = (1,1,2)$ και $\mathbf{w} = (1,2,1)$ είναι εφαπτόμενα ή κάθετα στην επιφάνεια στο σημείο p.

3)
   i) Να αποδειχθεί ότι για μια διαφορίσιμη συνάρτηση σε μια επιφάνεια $f : M \to \mathbb{R}$, ισχύουν $D_{\mathbf{x}_u} f = \mathbf{x}_u[f] = \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial u}$, $D_{\mathbf{x}_v} f = \mathbf{x}_v[f] = \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial v}$ όπου $\tilde{f}(u,v) = f(\mathbf{x}(u,v))$ είναι η τοπική παράσταση (ως προς $\mathbf{x}$) της f .

   ii) Να γίνει εφαρμογή για τη συνάρτηση $f(p_1, p_2, p_3) = [e^{2p_1} - (p_2^2 + p_3^2) + 1]p_2$ στην επιφάνεια του θέματος. υπολογίζοντας η τοπική έκφραση $\tilde{f}$ της f ως προς $\mathbf{x}$ και τις : $D_{\mathbf{x}_u} f$, $D_{\mathbf{x}_v} f$ και $D_{\mathbf{v}_p} f = \mathbf{v}_p[f]$, όπου $\mathbf{v}_p = (1,1,2)$ και $p = \mathbf{x}(0,0)$.

ΘΕΜΑ 3:

1) Να αποδείξετε ότι αν σε ένα σημείο μιας επιφάνειας με κύριες καμπυλότητες k_1, k_2 και αντίστοιχες κύριες διευθύνσεις $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ένα μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $\mathbf{v}$ γράφεται $\mathbf{v} = συνθ\mathbf{e}_1 + ημθ\mathbf{e}_2$, τότε η κάθετη καμπυλότητα κατά τη κατεύθυνση του $\mathbf{v}$ είναι $k(\mathbf{v}) = k_1 συν^2\theta + k_2 ημ^2\theta$.

2) Θεωρούμε ένα σημείο p σε περιοχή ενός χάρτη $(\mathbf{x}, D)$ ομαλής επιφάνειας M . Αν για τον τελεστή σχήματος στο σημείο αυτό ισχύει $S\mathbf{x}_u = 2\mathbf{x}_u$, $S\mathbf{x}_v = -\mathbf{x}_v$, τότε στο σημείο αυτό,
   i) Να βρείτε τις κύριες καμπυλότητες και τις κύριες διευθύνσεις καμπυλότητας και να αποδείξετε ότι οι παραμετρικές γραμμές τέμνονται κάθετα.
   ii) Να υπολογίσετε τη κάθετη καμπυλότητα $k(\mathbf{v})$ για ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{v}$ για το οποίο είναι $\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1 = \sqrt{3}/2$, και $\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2 = 1/2$.

Συνεχίζεται → →

ΘΕΜΑ 4:

1) Αν η $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t)), \quad t \in I$ είναι μια καμπύλη επιφάνειας με κάθετο διανυσματικό πεδίο $\mathbf{U}$, να αποδειχθεί ότι η συνιστώσα της επιτάχυνσης της α κατά τη κατεύθυνση του $\mathbf{U}$ είναι:

$$\alpha''_{\mathbf{x}}(t) = [L(u')^2 + 2Mu'v' + N(v')^2]\mathbf{U} = \mathrm{II}(\alpha', \alpha')\mathbf{U}$$

όπου, L, M, N οι συντελεστές, ως προς $\mathbf{x}$, της 2ης τετραγωνικής μορφής.

2) Μια παραμετρική επιφάνεια παράγεται από περιστροφή της φυσικής παραμετρικής καμπύλης $c(v) = (f(v), 0, g(v)), v \in I$, περί τον άξονα $z'z$ και περιγράφεται από την $\mathbf{x}(u,v) = (f(v)συνu, f(v)ημu, g(v)), (u,v) \in (0, 2\pi) \times I$.

a. Να υπολογισθούν οι συντελεστές της πρώτης θεμελιώδους τετραγωνικής μορφής και το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο $\mathbf{U}$.

b. Να αποδείξετε ότι κάθε μεσημβρινός είναι γεωδαισιακή καμπύλη.

c. Να αποδειχθεί ότι οι $S\mathbf{x}_u = -\dfrac{g'(v)}{f(v)}\mathbf{x}_u$, $S\mathbf{x}_v = -\dfrac{g''(v)}{f'(v)}\mathbf{x}_v$ και να βρεθούν οι κύριες καμπυλότητες και η καμπυλότητα Gauss.

ΘΕΜΑ 5: Σε ένα σημείο p σε περιοχή ενός χάρτη $(\mathbf{x}, D)$ ομαλής επιφάνειας M για τον τελεστή σχήματος στο σημείο αυτό ισχύει $S\mathbf{x}_u = 2\mathbf{x}_v$, $S\mathbf{x}_v = 8\mathbf{x}_u$.

1) Να βρείτε τις κύριες καμπυλότητες και τις κύριες διευθύνσεις καμπυλότητας
2) Να χαρακτηρισθεί το σημείο.

Λύσεις Ιούνιος 2004

ΘΕΜΑ 1 1) $d\times T=(\tau T+kB)\times T=kB\times T=kN=T'$

$d\times N=(\tau T+kB)\times N=\tau T\times N+kB\times N=\tau B-kT=N'$

$d\times B=(\tau T+kB)\times B=\tau T\times B=-\tau N=B'$

$d'=\tau' T+\tau T'+k'B+kB'=\tau' T+\cancel{\tau kN}+k'B-\cancel{k\tau N}$

B) 1. $x_s\times x_v=(\beta'+vd')\times d=\beta'\times d+vd'\times d=T\times d+v(\tau' T+k'B)\times d$

$=T'+v(\tau' T+k'B)\times(\tau T+kB)=T'+v(\tau' k\, T\times B+k'\tau\, B\times T)=$

$=kN+v(-\tau' k\bar{N}+k'\tau\bar{N})=[k+v(k'\tau-k\tau')]N$

Αν $k'\tau-k\tau'\neq 0 \Rightarrow k\neq 0 \Rightarrow x_s\times x_v\neq 0 \quad \forall (s,v)\in D$

2. $\beta'=T$, $\beta''=T'=kN$. Άρα η $\beta''\parallel N$. Όμως από το (1) το $x_s\times x_v\parallel N \Rightarrow U\parallel N$. Άρα $\beta''\parallel U$ δηλαδή γεωδ/κή.

ΘΕΜΑ 2 A) 1) $q=(0,\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})=(v,e^v\sigma\upsilon\nu u,e^v\eta\mu u)\Leftrightarrow v=0,\ u=-\pi/4$

Άρα $q=x(-\pi/4,1)$. Βάση στον T_pM τα $x_u(0,0),x_v(0,0)$. Είναι:

$x_u=(0,-e^v\eta\mu u,e^v\sigma\upsilon\nu u)$ $\quad x_u(0,0)=(0,0,1)$, $U(0,0)=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)$

$x_v=(1,e^v\sigma\upsilon\nu u,e^v\eta\mu u)$ $\quad x_v(0,0)=(1,1,0)$ κάθετο

2) Για το $V=(1,1,2)\Rightarrow V\cdot U=0\Rightarrow V\in T_pM$.

Για το $W=(1,2,1)\Rightarrow W\cdot U=1/\sqrt{2}\neq 0$ άρα δεν είναι εφαπτόμενο. Όμως δεν είναι ούτε κάθετο διότι $W\cdot x_u(0,0)=1\neq 0$.

B) 1) Σημειώσεις παράδ 1 σελ 81

2) $\tilde{f}(u,v)=f(x(u,v))=f(e^v,e^v\sigma\upsilon\nu u,e^v\eta\mu u)=(e^{2v}-e^{2v}+1)e^v\sigma\upsilon\nu u=e^v\sigma\upsilon\nu u$

$D_{x_u}f=\tilde{f}_u=-e^v\eta\mu u$, $D_{x_v}f=\tilde{f}_v=\sigma\upsilon\nu u$.

$V_p=(1,1,2)=2x_u(0,0)+x_v(0,0)\Rightarrow D_{V_p,p}f=2D_{x_u}f|_p+D_{x_v}f|_p=2f_u(0,0)+f_v(0,0)$

$=2\cdot 0+1=1$

ΘΕΜΑ 3 1) $k(v) = v \cdot Sv = (\cos\theta\, \bar{e}_1 + \sin\theta\, \bar{e}_2) \cdot S(\cos\theta\, \bar{e}_1 + \sin\theta\, \bar{e}_2)$

$= \cos^2\theta(\bar{e}_1 \cdot S\bar{e}_1) + \sin^2\theta(\bar{e}_2 \cdot S\bar{e}_2) + \cos\theta\sin\theta(\bar{e}_1 \cdot S\bar{e}_2 + \bar{e}_2 \cdot S\bar{e}_1)$

Όμως $\bar{e}_1 \cdot S\bar{e}_1 = k(e_1) = k_1$, $\bar{e}_2 \cdot S\bar{e}_2 = k(\bar{e}_2) = k_2$ και

$\bar{e}_1 \cdot S\bar{e}_2 = \bar{e}_2 \cdot Se_1$ όπως και $\bar{e}_1 \cdot S\bar{e}_2 = \bar{e}_1 \cdot k_2 \bar{e}_2 = k_2 \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 = 0$.

2) (i) $k_1 = 2$, $k_2 = -1$ (ως ιδιοτιμές του S), και

$\bar{e}_1 = \bar{x}_u / \|\bar{x}_u\|$, $\bar{e}_2 = \bar{x}_v / \|\bar{x}_v\|$ (ως ιδιοδιανύσματα) που επειδή $\bar{e}_1 \bar{e}_2 = 0$

$\Rightarrow \bar{x}_u \cdot \bar{x}_v = 0 \Rightarrow$ οι παραμ/κές γραμμές τέμνονται κάθετα.

(ii) Αν $v = \cos\theta\, \bar{e}_1 + \sin\theta\, e_2 \Rightarrow \cos\theta = v \cdot e_1 = \sqrt{3}/2$

$\sin\theta = v \cdot e_2 = 1/2 \Rightarrow \theta = \pi/6 \Rightarrow v = \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{e}_1 + \frac{1}{2}\bar{e}_2$

$\Rightarrow k(v) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot 2 + (-1)\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 5/4$

ΘΕΜΑ 4: 1) $\alpha'(t) = x_u u' + x_v v'$

$\alpha'' = (x_{uu} u' + x_{uv} v') u' + x_u u'' + (x_{vu} u' + x_{vv} v') v' + x_v v'' =$

$= x_u u'' + x_v v'' + x_{uu} u'^2 + x_{vv} v'^2 + 2x_{uv} u' v'$

Άρα

$\alpha'' \cdot U = U \cdot x_{uu} u'^2 + U \cdot x_{vv} v'^2 + 2x_{uv} \cdot U u' v'$

$= L u'^2 + 2M u' v' + N v'^2$

2) $\bar{x}_u = (-f\sin u, f\cos u, 0)$
α) $\bar{x}_v = (f'\cos u, f'\sin u, g')$ $\Big\} \Rightarrow \bar{x}_u \times \bar{x}_v = (fg'\cos u, fg'\sin u, -ff')$

$E = \bar{x}_u \cdot \bar{x}_u = f^2(v)$, $F = \bar{x}_u \cdot \bar{x}_v = 0$, $G = \bar{x}_v \cdot \bar{x}_v = f'^2(v) + g'^2(v) = 1$

$\|x_u \times x_v\| = f(v) \Rightarrow U = (g'\cos u, g'\sin u, -f')$

β) Η επιφάνεια εντός μεσημβρινού είναι $x_{vv} = (f''\cos u, f''\sin u, g'')$

Άρα $x_{vv} \cdot x_u = \cdots = 0$, $x_{vv} \cdot x_v = f'f'' + g'g'' = 0$ (παραγωγίζω $g'^2 + f'^2 = 1$)

Άρα $x_{vv} \parallel U \Rightarrow$ ο μερ. είναι γεωδαισία

γ) $Sx_u = -U_u = (g'\sin u, -g'\cos u, 0) = -\frac{g'(v)}{f(v)} x_u$

$Sx_v = -U_v = (-g''\cos u, -g''\sin u, g'') = -\frac{g'}{f'} x_v$

Άρα $[S]_x = \begin{bmatrix} -g'/f & 0 \\ 0 & -g''/f' \end{bmatrix} \Rightarrow$ $e_1 = x_u / \|x_u\|$, $k_1 = -g'/f$; $e_2 = x_v / \|x_v\|$, $k_2 = -g''/f'$