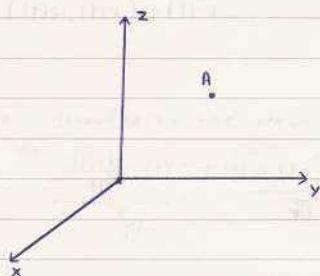


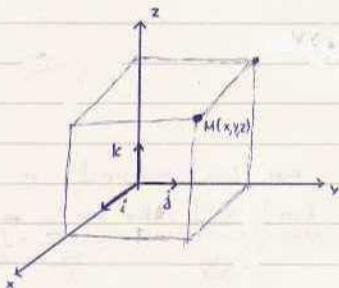
Ερ. 105 / 7721311 / Μπαρτζώκας

Kinematik1] Φυσικος Τροπος περιχρονησ κινησ

a] Αξιετημα αναφοράς

b] Τροχια

c] Φρχη κινησ και χρόνου +

d]  $s = f(t) \rightarrow$  την κινησ2] Ηε Τη Βοηθεια Των Συντεταγμενων

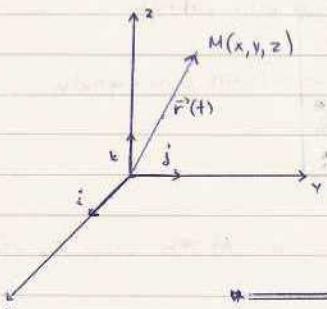
$$x = x(t) \quad \dot{x} = U_x \quad \ddot{x} = \ddot{X}_x$$

$$y = y(t) \quad \dot{y} = U_y \quad \ddot{y} = \ddot{Y}_y$$

$$z = z(t) \quad \dot{z} = U_z \quad \ddot{z} = \ddot{Y}_z$$

$$U = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}$$

$$\ddot{U} = \sqrt{\ddot{x}^2(t) + \ddot{y}^2(t) + \ddot{z}^2(t)}$$

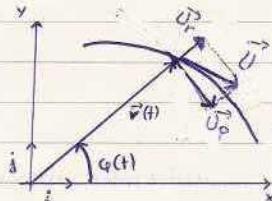
3] Διανυσματικος Τροπος

$$\vec{r}(t) = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j} + z(t) \vec{k}$$

$$\vec{U}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{x}(t) \vec{i} + \dot{y}(t) \vec{j} + \dot{z}(t) \vec{k}$$

$$\vec{\ddot{U}}(t) = \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t) \vec{i} + \ddot{y}(t) \vec{j} + \ddot{z}(t) \vec{k}$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΩΝ ΤΟΝΙΚΟΥ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ



Καρτεσιανές διπτετογλίες:

$$\vec{r}(t) = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j}$$

Μολικές διπτετογλίες:

$$\vec{r}(t) = (r(t), \varphi(t))$$

Iexwai  $\vec{r}(t) = r(t) \cdot \vec{r}_0(t)$

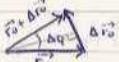
↳ Μονοδιάστατη διπτετογλία που δικαιεί την κατεύθυνση.

$$\vec{U}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (r(t) \cdot \vec{r}_0(t)) = \underbrace{\dot{r}(t) \vec{r}_0(t)}_{U_r} + r(t) \cdot \underbrace{\frac{d\vec{r}_0(t)}{dt}}_{U_p}$$

$$\left( \frac{d\vec{r}_0(t)}{dt} \perp \vec{r}_0(t) \text{ xiaxi } \frac{\Delta(\vec{r}_0 - \vec{r}_0)}{\Delta t} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{r}_0}{dt} \cdot \vec{r}_0 + \vec{r}_0 \cdot \frac{d\vec{r}_0}{dt} = 2\vec{r}_0 \cdot \frac{d\vec{r}_0}{dt} = 0 \right. \\ \left. \text{↳ xiaxi elissi apodiktikos} \right)$$

Ωpa  $\frac{d\vec{r}_0(t)}{dt} \perp \vec{r}_0(t)$

Έτσι σας



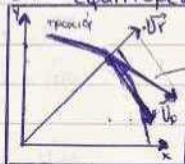
$$|\vec{r}_0| = |\vec{r}_0 + \Delta \vec{r}_0| = 1 \text{ και } |\Delta \vec{r}_0| = 2 \sin \frac{\Delta \varphi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}_0(t)|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\frac{\Delta \varphi}{2}} \cdot \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}$$

Ωpa  $\vec{U}_r = \dot{r}(t) \cdot \vec{r}_0(t)$

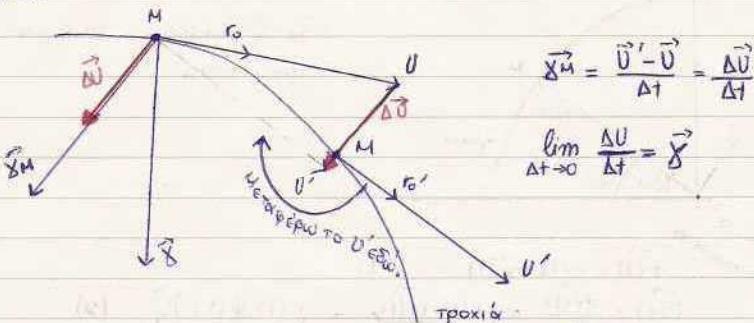
$$\vec{U}_p = r(t) \cdot \dot{\varphi}(t) \cdot \vec{P}_0 \quad (\vec{P}_0 \perp \vec{r}_0)$$

( $\vec{U}_r \perp \vec{U}_p$ ) και ευνοϊκότερη εφαρμογή στην κατηύθυνση



Ⓐ Αγου  $\Delta t \rightarrow 0$  iexwai  $\Delta \varphi \rightarrow 0$

## Επιτάχυνση



- Αν το  $M'$  και το  $M$  πλησιάζουν τότε έχω επιπέδο. Αν σίλη ν τροχιά βρίσκεται σ' αυτό τότε έχω επίπεδη τροχιά (Συμβιβασης).

\* ----- \*

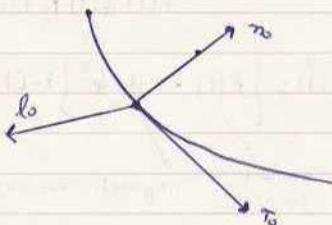
Μέση καμπυλότητας καμπύλης  $k = \frac{\Delta \theta}{ds}$

$$\lim_{ds} \frac{\Delta \theta}{ds} = \lim_{ds} \frac{\Delta \vec{r}_0}{ds} = \frac{d\vec{r}_0}{ds} = k \rightarrow \text{καμπυλότητα καμπύλης}$$

$$\frac{1}{k} = p \rightarrow \text{ρακτικής καμπυλότητας}$$

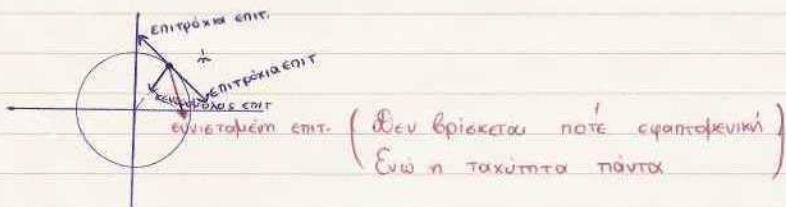
Θέση

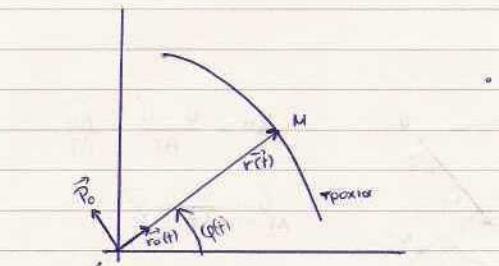
$$X = \frac{dU}{dt} \vec{r}_0 + \frac{U^2}{R} \vec{m}_0$$



\* ----- \*

## Παράδειγμα 2 (Κυκλική τροχιά)





To  $\vec{P}_o$  συγχέεται στη γραμμή της γυριστικής παράστασης.

$$\text{notas d' enketoi anapodis} \quad \vec{r}(t) = r(t) \cdot \vec{r}_0(t) \quad (1)$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \underbrace{\dot{r}(t) \cdot \vec{r}_0(t)}_{\vec{v}_r} + \underbrace{r(t) \dot{\varphi}(t) \vec{P}_o}_{\vec{v}_p} \quad (2)$$

$$\vec{x}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} [\dot{r}(t) \cdot \vec{r}_0(t)] + \frac{d}{dt} [r(t) \dot{\varphi}(t) \vec{P}_o] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{x}(t) = \ddot{r}(t) \vec{r}_0(t) + \dot{r}(t) \cdot \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \dot{r}(t) \dot{\varphi}(t) \vec{P}_o(t) + r(t) \ddot{\varphi}(t) \vec{P}_o(t) + r(t) \dot{\varphi}(t) \cdot \frac{d\vec{P}_o(t)}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{x}(t) = \ddot{r}(t) \vec{r}_0(t) + \dot{r}(t) \dot{\varphi}(t) \vec{P}_o(t) + \dot{r}(t) \ddot{\varphi}(t) \vec{P}_o(t) + r(t) \ddot{\varphi}(t) \vec{P}_o(t) - r(t) \dot{\varphi}(t) \vec{r}_0(t) \Rightarrow$$

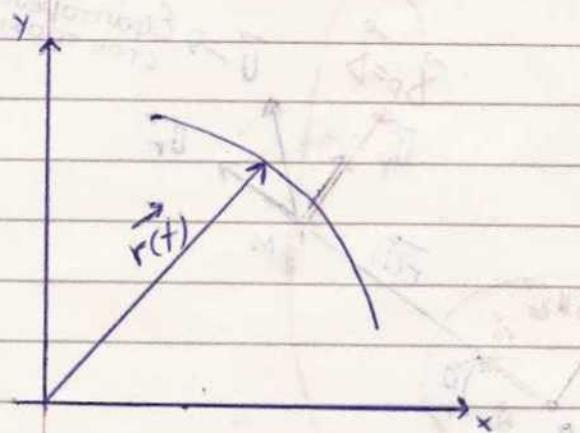
↓  
γύριστική παράσταση

$$\Rightarrow \vec{x}(t) = \left\{ \ddot{r}(t) + r(t) \dot{\varphi}^2 \right\} \vec{r}_0(t) + \left\{ r(t) \ddot{\varphi}(t) + 2\dot{r}(t) \dot{\varphi}(t) \right\} \vec{P}_o(t) \quad (II)$$

↓  
Ελαστότητα

↙  
κεραυνώσεις  
γύριστικής.  
Πηγαίνει προς το κέντρο

$$\frac{d\vec{P}_o(t)}{dt} = -\dot{\varphi}(t) \cdot \vec{r}_0.$$

Μηχανική III

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t) \cdot \vec{r}_0(t)$$

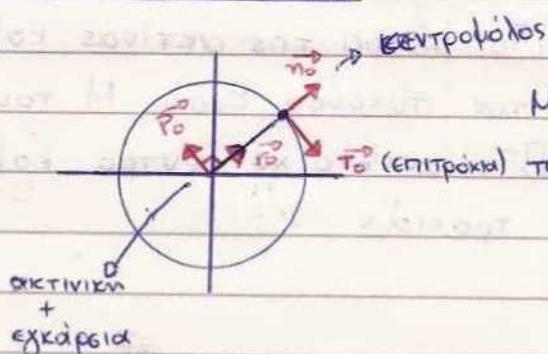
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \underbrace{\dot{r}(t) \cdot \vec{r}_0(t)}_{U_r} + \underbrace{r(t) \ddot{\varphi}(t) \vec{P}_0}_{U_p}$$

$$\vec{P}_0 \perp \vec{r}_0$$

$$\vec{x}(t) = \underbrace{\ddot{r}(t) - r(t) \ddot{\varphi}^2(t)}_{\vec{x}_r} \vec{r}_0(t) + \underbrace{\left\{ r(t) \ddot{\varphi}(t) + 2 \dot{r}(t) \dot{\varphi}(t) \right\}}_{\vec{x}_p} \vec{P}_0(t)$$

$$\vec{x}(t) = \underbrace{\frac{dU}{dt} \vec{r}_0}_{\vec{x}_T} + \underbrace{\frac{U^2}{R} \vec{n}_0}_{\vec{x}_n} \rightarrow \text{ακτίνα καμπυλότητας}$$

Σταθμώς κυκλική κίνηση

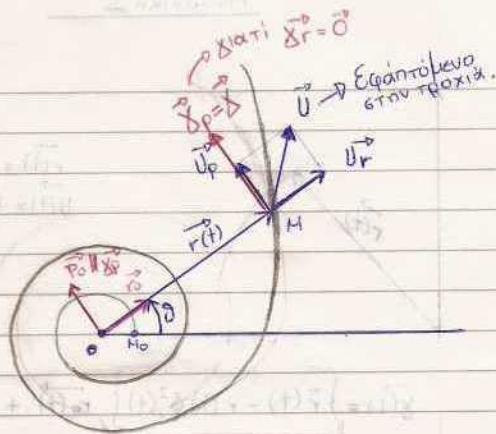


Μόνο στην κυκλική κίνηση  $\vec{x}_p = \vec{x}_T$  και  $\vec{x}_n = \vec{x}_r$ .

$$x = (1) \quad \theta = \omega t = (1) \quad \theta = \omega t$$

$$\theta = \omega t$$

ΩΣΗΣΗ 1



Υλικό σημείο  $M$  διαχειρίζεται την εκθετικήν (λοχαριδικήν) έλικα βάσει του τύπου  $r(t) = \alpha e^{\theta(t)}$  και  $\dot{\theta}(t) = \omega t$  όπου  $\omega = \text{const.}$   
και  $\alpha = \text{const.}$

- Διαλέξιμα:
- Το μέτρο και ο γραφικός της ταχύτητας είναι σχετικό με την πολική ακτίνα  $OM$ .
  - Το μέτρο και ο γραφικός της επιτάχυνσης είναι σχετικό με την πολική ακτίνα  $OM$ .
  - Το μέτρο της αρτίνας κατηπολεμήτητας για την τυχόντα θέση  $M$  του κινντού.
  - Το αυτοτοιχό κέντρο κατηπολεμήτητας της τροχιάς

Άγων 1

$$\text{για } Mo: r(0) = \alpha e^{\theta(0)} = \alpha e^0 = \alpha \quad \text{⇒} \text{α } r(t) = \alpha$$

a] Πάγιρνο του τύπου:  $\vec{U}(t) = \dot{r}(t) \vec{r}(t) + r(t) \cdot \dot{\theta}(t) \vec{P}_\theta$

$$\text{⇒} \text{α } \dot{r}(t) = \alpha \omega e^{\omega t}$$

$$r(t) \dot{\theta}(t) = \alpha \omega e^{\omega t}$$

$$\text{⇒} \text{α } \vec{U} = \alpha \omega e^{\omega t} \quad (45^\circ \rightarrow \vec{U}_r = \vec{U}_p)$$

$$|\vec{U}| = \sqrt{2} \alpha \omega e^{\omega t}$$

Μηχανική III

Φύσης Ι (Αυτέλεση)

$$\vec{y}_r = \dots = \vec{0}$$

$$\text{και } |\vec{y}_p| = \dots = 2\omega^2 e^{wt}$$

Εώς τέλει  $\vec{y} = \vec{y}_p$  γιατί  $\vec{y}_r = \vec{0}$ .

2] Πρέπει να χαρακτηρίσουμε τον τύπο  $\vec{y}(t) = \frac{dU}{dt} \vec{T}_0 + \frac{U^2}{R} \vec{n}_0$   
και αριθμό τα  $\vec{T}_0, \vec{n}_0$ .

To: Ανό το  $\vec{y}$  σφέρνω προβολή στην εργατική ευθεία  
Ενεργίας είναι ή μεταξύ στην  $\vec{U}$  και αριθμ.  $= 45^\circ$ .

$$\vec{x}_T = \frac{\vec{y} \sqrt{2}}{2}$$

με: To  $\vec{n}_0 \perp \vec{T}_0$ . αριθ.  $\vec{x}_n \perp \vec{x}_T \Rightarrow \vec{x}_n = \frac{\vec{y} \sqrt{2}}{2}$ .

$$\text{Ανό του τύπου } \vec{y}(t) = \frac{dU}{dt} \vec{T}_0 + \frac{U^2}{R} \vec{n}_0 \Rightarrow \dots =$$

$$\Rightarrow \frac{U^2}{R} = \frac{\vec{y} \sqrt{2}}{2} \Rightarrow R = \sqrt{2} \alpha \cdot w^2 \Rightarrow R(t) = \sqrt{2} r(t)$$

3] Έτσι κάποιο σημείο της  $\vec{y}$  βρίσκεται το κέντρο  
κατανοήστες.

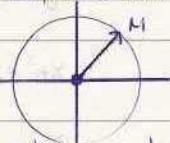
To μήκος της ακτίνας κατανοήστες  $R$  είναι  $r\sqrt{2}$  και  
η ακτίνα κατανοήστες  $R$  βρίσκεται πάνω στην  $\vec{x}_n$   
(ζεινότερο από την προξείδια σημείο  $M$ ) και τέλει ως το  
κέντρο κατανοήστες). To μήκος της είναι  $r\sqrt{2}$ . Άπω,  
επειδή η απόσταση  $\frac{M}{\text{πάνω την πάλι}}$  την πάλι είναι  
 $r$ , τότε ου σφέρνω κάθετα μήκους  $r$  από την πάλι.  
To σημείο που τέλει την  $\vec{y}$  είναι το μήκος της  $R$ .

\* γιατί έτσι της είναι κυκλική κίνηση.

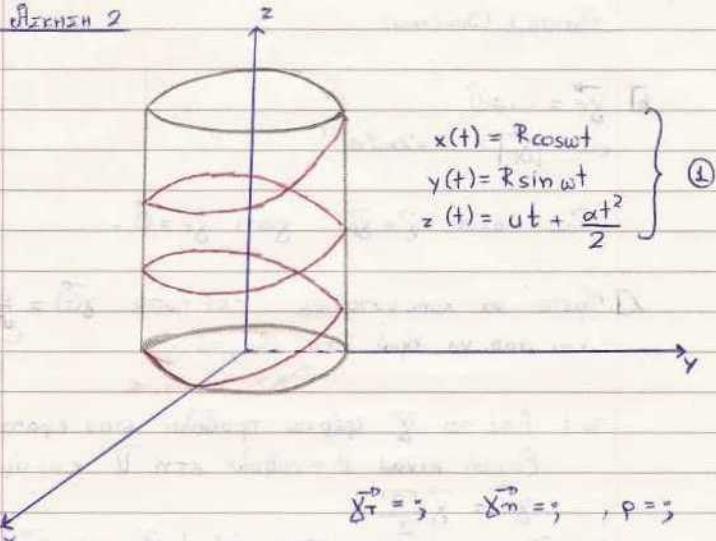
η κεντροκόλλος επιπάχουν διέρχεται

από το κέντρο της κυκλικής προχείδια,

τοι και η  $\vec{y}$  διέρχεται από το κέντρο κατανοήστες.



Übung 2



Übung 2

$$② \left\{ \begin{array}{l} U_x = \dot{x}(t) = -\omega R \sin \omega t \\ U_y = \dot{y}(t) = \omega R \cos \omega t \\ U_z = \dot{z}(t) = u + \alpha t \end{array} \right\} \quad \begin{aligned} U^2 &= \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t) = \dots = \\ &= \omega^2 R^2 + (u + \alpha t)^2 \end{aligned} \quad ④$$

$$③ \left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = \ddot{x}(t) = -\omega^2 R \cos \omega t \\ \ddot{y} = \ddot{y}(t) = -\omega^2 R \sin \omega t \\ \ddot{z} = \ddot{z}(t) = \alpha \end{array} \right\} \quad \begin{aligned} \ddot{U}^2 &= \ddot{x}^2(t) + \ddot{y}^2(t) + \ddot{z}^2(t) = \dots = \\ &= \omega^4 R^2 + \alpha^2 = e \tau \alpha \omega \rho \alpha \end{aligned} \quad ⑤$$

$$\underline{\text{Differenzieren}} \quad \frac{d}{dt} (U^2) = \frac{d}{dt} (\omega^2 R^2 + (u + \alpha t)^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2U \frac{dU}{dt} = \alpha(u + \alpha t) \Rightarrow$$

$\vec{g}_T = \frac{dU}{dt} = \frac{\alpha(u + \alpha t)}{2U} = \stackrel{(4)}{=} \frac{\alpha \sqrt{U^2 - \omega^2 R^2}}{2U}$

and  $\frac{U^2}{2} + \frac{\omega^2 R^2}{4} = \text{konst}$

$$x^2 = g^2 - g_T^2 \Rightarrow (g_1 \text{ ari} \cdot \vec{g}_T \perp g_T) \Rightarrow g_n = \dots = \frac{\omega R}{U} \sqrt{\omega^2 U^2 + \alpha^2}$$

$$\underline{\text{Differenzieren}} \quad g_n = \frac{U^2}{P} = \frac{\omega R}{U} \sqrt{\omega^2 U^2 + \alpha^2}$$

\*—————\*

Μηχανική IIIΑΙΓΑΙΗΣΗ 1

Το υλικό αντείο  $M$  κινείται στις τις ευθείες  $OA$  με ταχύτητα  $\vec{v} = k\vec{r}$ . Την χρονική στιγμή  $t=0$  βρίσκεται στη θέση  $M_0$  που αντιστοιχεί σεm θέση  $r=r_0$ . Η ευθεία  $OA$  περιστρέφεται γύρω από το  $O$  με σταθερή γεν. ταχύτητα  $\omega(t)=\omega t$ .

- a] Η τροχιά του  $M$
- b] Η ταχύτητα
- c] Η επιτάχυνση
- d] Η επιπρόσδικη επιτ.
- e] Κεντροπολικός επιτ.
- f]  $\rho =$ ;

ΑΙΓΑΙΗ 3

$$\text{a)] } \vec{U}(t) = \vec{U}_r + \vec{U}_p \quad \text{①}, \text{ Αλλά } \vec{U}_r = \vec{U}(t) = k\vec{r}(t)$$

Kou apό  $\frac{dr}{dt} = Kr \Rightarrow \frac{dr}{r} = k dt \Rightarrow \ln \frac{r}{r_0} = kt \Rightarrow$

$$\Rightarrow r(t) = r_0 e^{kt}$$

$$\left. \begin{array}{l} \omega = \omega t \\ r(t) = r_0 e^{kt} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \omega(t) = \omega t \\ r(t) = r_0 e^{k\omega t / \omega} \end{array}$$

$$\text{b)] } \text{Όποια ανίσ η τύπος } U(t) = \dot{r}(t) \vec{r}(t) + r(t) \dot{\varphi}(t) \vec{P}_0$$

$$\vec{U}_r = kr \quad \text{και} \quad \vec{U}_p = r \dot{\varphi} = \omega r \quad \boxed{\vec{U} = \sqrt{k^2 + \omega^2} r}$$

$$\text{c)] } \left. \begin{array}{l} \vec{g}_r = \dots = (k^2 - \omega^2) r \\ \vec{g}_p = \dots = 2kr\omega \end{array} \right\} \vec{g} = \dots = (k^2 + \omega^2) r$$

$$\text{d)] } \vec{g} = \vec{g}_r + \vec{g}_p = \frac{dU}{dt} \vec{T}_0 + \frac{U^2}{r} \vec{n}_0$$

$$\vec{g}_r = \dots = kr \sqrt{k^2 + \omega^2}$$

$$\vec{g}_p = \dots = \sqrt{k^2 - \omega^2} r = \omega r \sqrt{k^2 + \omega^2}$$

$$P = \frac{U^2}{\omega r} = \dots = \frac{\sqrt{k^2 + \omega^2} r}{\omega}$$

Mnixavikin III

$$\text{Eniens} \quad i' \cdot j' = l_{11} \cdot l_{21} + l_{12} \cdot l_{22} + l_{13} \cdot l_{23} = 0$$

$$i' \cdot k' = l_{11} \cdot l_{31} + l_{12} \cdot l_{32} + l_{13} \cdot l_{33} = 0$$

$$j' \cdot k' = l_{21} \cdot l_{31} + l_{22} \cdot l_{32} + l_{23} \cdot l_{33} = 0$$

Υπά ευολκά χια τα  $lij$  έχουμε 6 σχέσεις. χια τα  $lij$

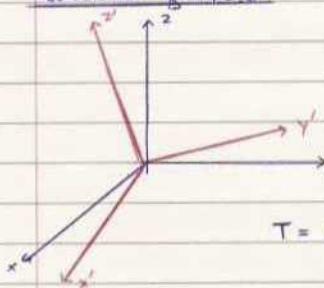
Υπά έχουμε 3 βαθύτερης ελευθερίας

- \* Για τα ταυτικά πρώτης τάξης (διάνυσματα)

$$\text{έχουμε } \vec{\alpha}' = \mathbb{R} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix}$$

- \* Για τα ταυτικά δευτέρας τάξης υπάρχει άλλος τόνος χια τη μεταφορά.

Θυαδικό χινότερα



$$\vec{A} = \alpha_x \vec{i} + \alpha_y \vec{j} + \alpha_z \vec{k}$$

$$\vec{B} = \beta_x \vec{i} + \beta_y \vec{j} + \beta_z \vec{k}$$

$$T = \vec{A} \otimes \vec{B}^T = \begin{bmatrix} \alpha_x \beta_x (\vec{i} \otimes \vec{i}) & \alpha_x \beta_y (\vec{i} \otimes \vec{j}) & \alpha_x \beta_z (\vec{i} \otimes \vec{k}) \\ \alpha_y \beta_x (\vec{j} \otimes \vec{i}) & \alpha_y \beta_y (\vec{j} \otimes \vec{j}) & \alpha_y \beta_z (\vec{j} \otimes \vec{k}) \\ \alpha_z \beta_x (\vec{k} \otimes \vec{i}) & \alpha_z \beta_y (\vec{k} \otimes \vec{j}) & \alpha_z \beta_z (\vec{k} \otimes \vec{k}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_x \beta_x & \alpha_x \beta_y & \alpha_x \beta_z \\ \alpha_y \beta_x & \alpha_y \beta_y & \alpha_y \beta_z \\ \alpha_z \beta_x & \alpha_z \beta_y & \alpha_z \beta_z \end{bmatrix}$$

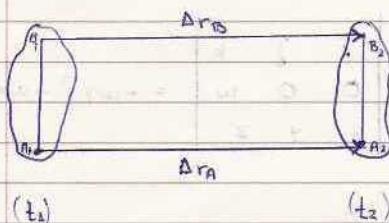
$$\bullet A^T = (\alpha_x \ \alpha_y \ \alpha_z)^T, \quad B^T = (\beta_x \ \beta_y \ \beta_z)^T, \quad T = AB^T$$

$$A' = RA, \quad B' = RB, \quad [R']^T = (RB)^T = B^T R^T$$

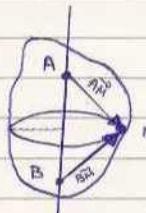
$$T' = A' [B']^T = \underbrace{RAB^T \cdot R^T}_{T} = RTR^T$$

Mηχανική III

Έστω σώμα σε 2 χρονικές στιγμές  $t_1, t_2$

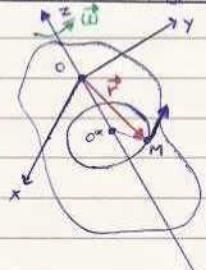
1] Μεταφορά

- Επειδή  $(A_1 B_1) = (A_2 B_2)$  προκύπτει ότι τα σώματα παραμένουν απαράλλαγμα
  - Ενισχυς  $A_1 B_1 \parallel A_2 B_2$  γιατί εχουμε μεταφορική κίνηση.
- $\downarrow$
- $$\Delta \vec{r}_a = \vec{\Delta r}_B$$
- $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_a}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_B}{\Delta t} \Rightarrow \vec{U}_a = \vec{U}_B$
  - Όποια  $\vec{x}_a = \vec{x}_B \quad \forall A, B$

2] Περιετροφή

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \omega.$$

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\epsilon}$$

ελαστική Περιχρόνη

$$|\vec{U}_M| = (O^* M)(\omega)$$

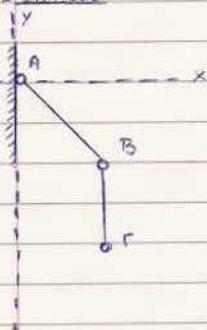
$$\text{Ποτη } \vec{\omega} = \vec{U}_M = (\vec{M}^*) \times \vec{\omega} = -\vec{O}^* \times \vec{\omega} = \vec{\omega} \times \vec{OM}$$

$$\Rightarrow \text{Ποτη } \vec{\omega} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{U}_M = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad * \text{ Μόνο σταύρ } |\vec{r}| = \text{const.}$$

## Μηχανική III

## 1) Επίπεδο



$A(x_A, y_A)$  → Ακύρωτο,  $x_A=0$  και  $y_A=0$

$B(x_B, y_B)$

$\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$

$(AB)$ : σταθερό, αναλλοιωτό και  $(B\Gamma)$ : σταθ + αναλλοιωτό

$$(AB) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$(B\Gamma) = \sqrt{(x_\Gamma - x_B)^2 + (y_\Gamma - y_B)^2}$$

Βαθμός ελευθερίας  $p = 3n - k$

↓ 4: γεωμετρικές σχέσεις

↓ 2: Επίπεδο, 2 διαστάσεις

$p = 6 - 4 = 2$  βαθμοί ελευθερίας

- Γεωμετρικοί συνδεσμοί : τα σταθερά σημεία του ευργήματος

$A$  = σταθερό  $\rightarrow x_A=0$  και  $y_A=0$

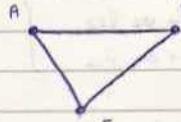
$l_{AB} =$  σταθ. χιονιά είναι πάθος.

$l_{B\Gamma} =$  σταθ. χιονιά είναι πάθος.

\* ----- \*

## 2) Χώρος

a) Έστω 3 σημεία  $A, B, \Gamma$  στο χώρο



Χρειάζονται 3 ευτεταγμένες

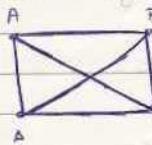
• Διαδιέρα :  $l_{AB}, l_{B\Gamma}, l_{A\Gamma}$

Άρα  $p = 3 \cdot 3 - 3 = 6$  βαθμούς

χώρος

ελευθερίας

b) Έστω 4 σημεία  $A, B, \Gamma, \Delta$  στο χώρο-



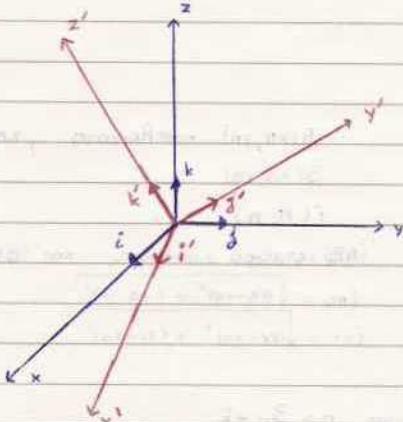
• Διαδιέρα :  $l_{AB}, l_{B\Gamma}, l_{\Gamma\Delta}, l_{\Delta A},$

$l_{A\Gamma}, l_{B\Delta}$

Άρα  $p = 3 \cdot 4 - 6 = 6$  βαθμούς  
ελευθερίας

\* ----- \*

Περιχροτήμα περιεχούσας σε 2 ευθύνες



$$\text{Ταίπει τα} \quad ii' = l_{11}, \quad i'j = l_{12}, \quad i'k = l_{13} \\ j'i = l_{21}, \quad j'j = l_{22}, \quad j'k = l_{23} \\ k'i = l_{31}, \quad k'j = l_{32}, \quad k'k = l_{33}$$

$$R = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \quad \text{Μητριά περιετροφής}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{\alpha}' &= \alpha_x i' + \alpha_y j' + \alpha_z k' \\ \alpha_x' &= \alpha_x l_{11} + \alpha_y l_{12} + \alpha_z l_{13} \\ \alpha_y' &= \alpha_x l_{21} + \alpha_y l_{22} + \alpha_z l_{23} \\ \alpha_z' &= \alpha_x l_{31} + \alpha_y l_{32} + \alpha_z l_{33} \end{aligned} \right\} \text{αφού} \quad \vec{\alpha}'(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z) = R \cdot \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix}$$

$$\text{Τεκνει} \quad i' = l_{11}i + l_{12}j + l_{13}k$$

$$j' = l_{21}i + l_{22}j + l_{23}k$$

$$k' = l_{31}i + l_{32}j + l_{33}k$$

~~$$i'i' = l_{11}^2 + l_{12}^2 + l_{13}^2$$~~

~~$$j'j' = l_{21}^2 + l_{22}^2 + l_{23}^2$$~~

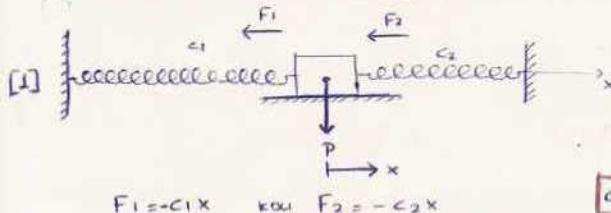
~~$$k'k' = l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2$$~~

$$(24)^2 + (25)^2 \Rightarrow A^2 [(k^2 - p^2)^2 + 4p^2 \theta^2] = P^2 \Rightarrow A = \frac{P}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4p^2 \theta^2}}$$

kou  $\frac{25)}{(24)} \Rightarrow \tan \theta = \frac{2 \theta p}{k^2 - p^2} \Rightarrow \theta = \arctan \left( \frac{2 \theta p}{k^2 - p^2} \right)$

\* Apa  $X(t) = \alpha \cdot e^{-\theta t} \cdot \sin(k_1 t + \phi) + \frac{P}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4p^2 \theta^2}} \cdot \sin(pt - \theta)$

Σύνεση αυτού των δύο στριών [3 περιπτώσεις.]



Αρχικά είναι και τα 2 στο έγκριτο τους λικός.

$$F_1 = -c_1 x \quad \text{kou} \quad F_2 = -c_2 x$$

$$C = C_1 + C_2$$

$$\frac{P}{g} \ddot{x} = F_1 + F_2 \Rightarrow \frac{P}{g} \ddot{x} + (c_1 + c_2)x = 0 \quad , \quad \ddot{x} + \frac{(c_1 + c_2)g}{P} x = 0$$

$$k^2 = \frac{(c_1 + c_2)g}{P} \quad . \quad x(t) = \alpha \cdot \sin(kt + \phi)$$

Πλ. αι αρχικές συθίσεις ήταν:  $c_1 = 4 \text{ N/cm}$ ,  $c_2 = 5 \text{ N/cm}$ ,  $P = 0,9 \text{ N}$

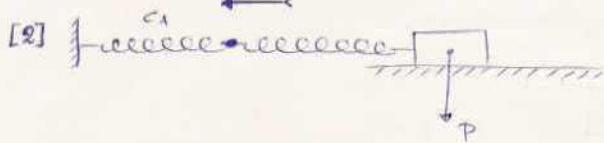
$$x_0 = 4 \text{ cm}, \dot{x}_0 = 90 \text{ cm/sec}$$

Επίσημη  $\alpha = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}} = \dots = 5$   
 $\phi = \arctan \frac{\dot{x}_0}{x_0} \approx 0,92 \text{ rad}$

kou  $k = \sqrt{\frac{(c_1 + c_2)g}{P}} = \dots = 30 \text{ sec}^{-1}$ .

\* Apa  $x(t) = 5 \cdot \sin(30t + 0,92)$  ,  $T = \frac{2\pi}{k} = 0,21 \text{ sec}$

(7)



$$x = \frac{F}{c_1} \Rightarrow \frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} = 0$$

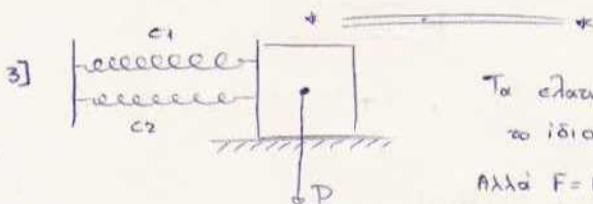
$$\Rightarrow x_1 = \frac{F}{c_1}, x_2 = \frac{F}{c_2} \Rightarrow C = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$$

$$\ddot{x} + k^2 x = 0 \Rightarrow k^2 = \frac{C g}{P} = \frac{c_1 c_2 g}{P(c_1 + c_2)}$$

To 2 ελατήρια σέχονται την ίδια  $F$ . Άλλα παρακορρίσουνται διαφορετικά.

$$(x_1, x_2) \rightarrow x_1 = \frac{F}{c_1} \text{ και } x_2 = \frac{F}{c_2} \dots$$

$$\dots x(t) = 7,25 \cdot \sin(14,9t + 0,58), \quad T = \frac{2\pi}{k} = 0,42 \text{ sec}$$



To ελατήρια παρακορρίσουνται ακριβώς όπως ιδια  $\rightarrow x_1 = x_2 = x$

Άλλα  $F = F_1 + F_2$ .

$$\text{Άρα } \frac{F}{x} = \frac{F_1}{x_1} + \frac{F_2}{x_2} = \frac{F_1 + F_2}{x} \Rightarrow C = c_1 + c_2$$

12

Άσκηση 1

Το βάρος της OA (ήμισος  $r$ ) είναι  $P_1$ .

Το βάρος της AB (ήμισος  $l$ ) είναι  $P_2$ .

Το βάρος του B κοιλού είναι  $P_3$ .

Με ποια φασή ( $M = ?$ ) πρέπει να περιστρέψει το OA έτσι ώστε η γραμμή περιστροφής της OA να είναι σταθερή;

Λύση

• Με πιο δεξιά σρχεται οι κίνηση ολος ο μηχανισμος  $\Rightarrow$  Βαθμος σλευδερίας = 1

Θέρα είναι τίσιμο  $Q_1 = q$

• Το σύργο είναι  $\delta A = Q_1 \cdot \delta \varphi$

$$\delta A = \underbrace{\delta A(M)}_{\text{Έργο ποντικού}} + \underbrace{\delta A(P_1)}_{\text{Έργο } P_1} + \underbrace{\delta A(P_2)}_{\text{Έργο } P_2} + \underbrace{\delta A(P_3)}_{\text{Έργο } P_3}$$

Ο. Αρχή  $P_3 \perp$  κίνηση

$$\delta A(M) = (M) \cdot \delta \varphi \Rightarrow \boxed{\delta A(M) = M \delta \varphi}$$

$\hookrightarrow$  Στοιχεία

$$\delta A(P_1) = \vec{P}_1 \cdot \vec{\delta r}_{c_1} = -P_1 \cdot \frac{r}{2} \cos \varphi \cdot \delta \varphi \Rightarrow \boxed{\delta A(P_1) = -P_1 \frac{r}{2} \cos \varphi \delta \varphi}$$

$\hookrightarrow \cos(180 - \varphi) = -\cos \varphi$

$$\delta A(P_2) = \vec{P}_2 \cdot \vec{\delta r}_{c_2} = -P_2 \cdot \delta r_{c_2} \cdot \cos(90^\circ - \gamma) = -P_2 \cdot \delta r_{c_2} \cdot \sin \delta = -P_2 \cdot (c_2 k) \sin \delta \cdot \delta \varphi = \\ = -P_2 (c_2 E_1) \delta \varphi = -P_2 \frac{l}{2} \cos \gamma \cdot \delta \varphi.$$

$$\left. \begin{array}{l} \delta r_A = r \cdot \delta \varphi \\ \delta r_A = (A) \delta \varphi \end{array} \right\} \boxed{\delta \varphi_K = \frac{r}{A} \delta \varphi} \quad \text{κατ.} \quad \overset{\Delta}{AK} : AK = \frac{AE}{\cos \varphi} = \frac{l \cos \gamma}{\cos \varphi}$$

$$\boxed{\delta A(P_2) = -P_2 \frac{r}{2} \cos \varphi \delta \varphi}$$

$$\text{Appl. } \delta A = \left[ M - \frac{1}{2} r (P_1 + P_2) \cos \varphi \right] \delta \varphi$$

$$Q_{\varphi} = M - \frac{1}{2} r (P_1 + P_2) \cos \varphi$$

$$\star T = T_1 + T_2 + T_3$$

$$\star T_2 = \frac{1}{2} I_0 \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m_{OA} \cdot \omega^2 \cdot r^2 = \frac{1}{6} m_{OA} \cdot r^2 \cdot \omega^2 = \frac{1}{6} \frac{P_1}{g} r^2 \dot{\varphi}^2 \Rightarrow T_1 = \frac{1}{6} \frac{P_1}{g} r^2 \dot{\varphi}^2$$

$$\star T_2 = \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} \cdot (U_{C_2})^2 + \frac{1}{2} I_{C_2} \cdot \omega_2^2 = \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} \cdot (U_{C_2})^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{P_2}{g} \cdot \frac{1}{12} l^2 \cdot \omega_2^2 =$$

$$\star \delta_{\varphi k} = \frac{r}{Ak} \delta \varphi \Rightarrow \frac{d\varphi_k}{dt} = \frac{r}{Ak} \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \omega_2 = \frac{r}{Ak} \omega_1 = \frac{OA_1}{A_1 B} \cdot \omega_1 = \frac{r \cos \varphi}{l \cos y} \dot{\varphi} \Rightarrow \omega_2 = \lambda \cdot \frac{\cos \varphi}{\cos y} \cdot \dot{\varphi}$$

$$\underline{\text{Annex}} \quad \frac{\sin \varphi}{\sin y} = \frac{l}{r} \Rightarrow \sin y = \lambda \sin \varphi \Rightarrow \cos y = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}$$

$$\underline{\text{Appl.}} \quad \omega_2 = \lambda \cdot \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}} \cdot \dot{\varphi}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} (U_{C_2})^2 + \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} \cdot \frac{1}{12} l^2 \cdot \lambda \cdot \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}} \cdot \dot{\varphi}$$

$$\text{KOU: } U_{C_2} = \ddot{x}_{C_2}^2 + \ddot{y}_{C_2}^2$$

$$\ddot{x}_{C_2} = (OA) \cos \varphi + \frac{(AB)}{2} \cos y = r \cos \varphi + \frac{l}{2} \cos y = \dots = r \cos \varphi + \frac{l}{2} \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}$$

$$\ddot{y}_{C_2} = \dots = -r \left[ \sin \varphi + \frac{1}{2} \lambda (1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} \cdot \sin 2\varphi \right] \dot{\varphi}$$

$$y_{C_2} = \frac{r}{2} \sin \varphi \Rightarrow \dot{y}_{C_2} = \frac{r}{2} \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}$$

Appl.

$$U_{C_2}^2 = r^2 \left[ \left[ \sin \varphi + \frac{1}{2} \lambda (1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} \cdot \sin 2\varphi \right]^2 + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 \right]$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_2}{g} \cdot r^2 \left[ \left[ \sin \varphi + \frac{1}{2} \lambda (1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} \cdot \sin 2\varphi \right]^2 + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi \right] \dot{\varphi}^2 + \frac{P_2 l^2}{12 g} \lambda^2 \frac{\cos^2 \varphi}{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi} \cdot \dot{\varphi}^2$$

$$\star T_3 = \frac{1}{2} \frac{P_3}{g} \cdot U_B^2 = \frac{1}{2} \frac{P_3}{g} \cdot x_B^2 = \frac{1}{2} \frac{P_3}{g} \left[ (r \cos \varphi + l \cos y) \right]^2 = \frac{1}{2} \frac{P_3}{g} \left[ (r \cos \varphi + l \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}) \right]^2$$

$$\Rightarrow T_3 = \frac{P_3 r^2}{2g} \left[ \sin \varphi + \frac{1}{2} \lambda \sin 2\varphi (1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} \right]^2 \cdot (\dot{\varphi})^2$$

$$\underline{\text{Άριστος}} \quad T = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2$$

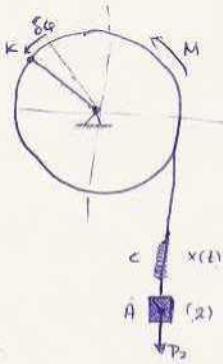
όπου

$$I = \frac{r^2}{12g} \left[ 4P_1 + P_2 \left[ \lambda \sin \varphi + \frac{1}{4} \lambda \cdot \sin 2\varphi \right]^2 + 3 \cos^2 \varphi + \frac{\cos^2 \varphi}{\left( 1 - \frac{1}{4} \lambda^2 + \frac{1}{4} \lambda^2 \cos^2 \varphi \right)^2} + 12 P_3 \left( \sin \varphi + \frac{1}{2} \lambda \sin 2\varphi \right)^2 \right]$$

Έπεισδή  $\omega_1 = \epsilon \tau \alpha \varphi \Rightarrow \ddot{\varphi} = 0$ .

$$\underline{\text{Άριστος}} \quad M = \frac{1}{2} \left[ \frac{dI}{d\varphi} \dot{\varphi}^2 + r(P_1 + P_2) \cos \varphi \right]$$

## ΚΗΣΗ 2



$$q_1 = \varphi, q_2 = x \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi \quad (3)$$

$$Q_x$$

$$\delta A = \delta A_1 + \delta A_2 = Q_x \cdot \delta x + Q_\varphi \cdot \delta \varphi \quad (4)$$

$$1) \delta x \neq 0, \delta \varphi = 0$$

$$\delta A_1 = \frac{(m_2 g - c x) \delta x}{Q_x}$$

$$2) \delta x = 0, \delta \varphi \neq 0$$

$$\delta A_2 = \underbrace{(M - m_2 g k)}_{Q_\varphi} \delta \varphi$$

$$U_2 = |\dot{x} - R \dot{\varphi}|$$

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_2 U_2^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{P_1}{g} R^2 \right) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{P_2}{g} \right) \left( \dot{x} - R \dot{\varphi} \right)^2 \quad (7)$$

Αριστος (2), (3)  $\xrightarrow{(5), (6), (7)}$   
 $\dots \Rightarrow -m_2 R \ddot{\varphi} + m_2 \ddot{x} = m_2 g - c x \quad (8)$

$$(m_2 + m_1) R \ddot{\varphi} - m_2 \ddot{x} = \frac{M}{R} - m_2 g \quad (9)$$

$$(8), (9) \Rightarrow \dots \Rightarrow m_1 R \ddot{\varphi} = \frac{M}{R} - c x \quad (10) \Rightarrow R \ddot{\varphi} = \frac{1}{m_1} \left( \frac{M}{R} - \frac{1}{m_1} c x \right) \quad (11)$$

$$(B) \xrightarrow{(10)} \dots \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + k^2 x = \frac{M}{m_1 - R} + g}$$

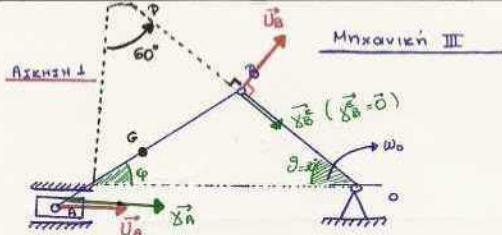
d'ou

$$k = \sqrt{c - \frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2}}$$

Exercice

Imp  $s = x - R_0$

\* --- \*



Άτο (Σ) (διοστήρας - ετρόφαλος) να προεδριστούν οι δυνάμεις του ακούντων στις αρμόδιες Α,Β όπου

έξηπ του μηχανισμού όπου ο ετρόφαλος BO εκπινατίζει χωρίς  $\theta = 30^\circ$ . Η βάρη του διοστήρα ΑΒ είναι  $m_{AB} = 12 \text{ kg}$  και κέντρο βάρους στο G.

Η βάρη του εκβόλου Α είναι  $m_A = 5 \text{ kg}$ . Οι τρίβες και τη κίνηση του είναι οριζόντια. Ο ετρόφαλος BO στρέφεται με σταθερή χωνιακή ταχύτητα.

$$\begin{aligned}m_{AB} &= 12 \text{ kg} \\m_A &= 5 \text{ kg} \\AG &= 200 \text{ mm} \\BG &= 300 \text{ mm} \\BO &= 200 \text{ mm} \\w_0 &= 2000 \text{ rad/min} \\I_G &= 0,3072 \text{ Nm} \cdot \text{sec}^2\end{aligned}$$

ΛύσηΚινητικότητα

$$\omega_0 = \frac{1200 \cdot 2\pi}{60} \text{ sec}^{-1} \Rightarrow \omega_0 = 125,56 \text{ sec}^{-1}$$

$$|\vec{v}_B| = (BO) \cdot \omega_0 = \dots = 25,13 \text{ m/sec} \Rightarrow |\vec{v}_B| = 25,13 \text{ m/sec}$$

$$|\vec{v}_A| = (BO) \omega_0^2 = \dots = 3158 \text{ m/sec}^2 \Rightarrow |\vec{v}_A| = 3158 \text{ m/sec}^2 \quad (\text{Θαυμάσιο, } \vec{v}_A = \vec{v}_{BO}, \vec{v}_B = \vec{v}_{AO}, \text{ ούτε } \vec{x}_0)$$

$$\frac{\sin \varphi}{200} = \frac{\sin 30^\circ}{500} \Rightarrow \dots \Rightarrow \varphi = 11,53^\circ \\ \psi = 78,47^\circ$$

$$\frac{\sin 60^\circ}{500} = \frac{\sin 78,47^\circ}{PB} \Rightarrow \dots \Rightarrow PB = 566 \text{ mm}$$

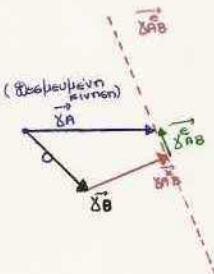
$$APa \quad (PA) = 383 \text{ mm}$$

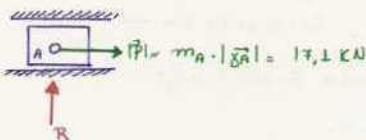
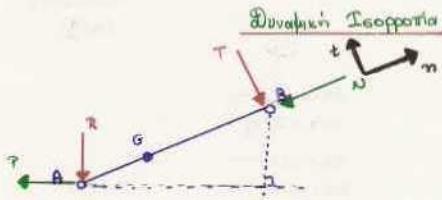
$$\omega_{AB} = \frac{|\vec{v}_B|}{PB} = \dots = 44,45 \text{ sec}^{-1} \Rightarrow \omega_{AB} = 44,4 \text{ sec}^{-1}$$

$$\vec{x}_A = \vec{x}_B + \vec{x}_{AB} + \vec{x}_{BA}$$

$$\bullet \vec{x}_{AB} = \omega_{AB}^2 (AB) = \dots = 986 \text{ m/sec}^2 \Rightarrow |\vec{x}_{AB}| = 986 \text{ m/sec}^2$$

$$|\vec{x}_A| = 3420 \text{ m/sec}^2 \\ |\vec{x}_{AB}| = 1415 \text{ m/sec}^2 \Rightarrow E_{AB} = \frac{|\vec{x}_{AB}|}{|AB|} = 1000 \text{ sec}^{-2}$$





Potenz B

αδρανειακών δυνάμεων  
ισού ήτε της  $P, R$

\* Βρίσκω την  $\vec{g}_A$ .

$$\vec{g}_A = \vec{g}_A + \vec{g}_{en} + \vec{g}_{GA}$$

$$• m_A \vec{g}_A = m_A \vec{g}_A + m_A \vec{g}_{en} + m_A \vec{g}_{GA}$$

$$1) m_A \vec{g}_A = 41 \text{ kN}$$

$$2) m_{AB} |\vec{g}_{GA}| = 4,73 \text{ kN}$$

$$3) m_{AB} |\vec{g}_{GA}| = 6,8 \text{ kN}$$

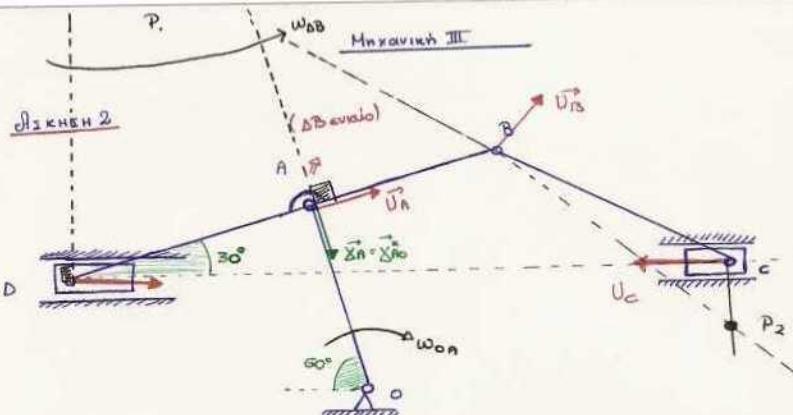
$$4) e_{AB} = 0,8 \text{ kN}$$

$$\text{Άρχο}: -R \cdot 0,5 \cos(11,53^\circ) + P \cdot 0,2 \cdot \sin 30^\circ = 0,87 - 41 \cdot 0,3 \sin(11,53^\circ) - 6,8 \cdot 0,3 = \dots = 0$$

$$\Rightarrow R = 10,87$$

$$\text{η: } * N + 17,1 \cos(11,53^\circ) + 10,89 \sin(11,53^\circ) = 4,73 - 41 \cos(11,53^\circ) = \dots \Rightarrow N = 53,37 \text{ kN}$$

$$\text{t: } * T - 17,1 \sin(11,53^\circ) + 10,89 \cos(11,53^\circ) = 6,8 + 41 \sin(11,53^\circ) = \dots \Rightarrow T = 7,74 \text{ kN}$$



Διανυσματικό παραδίδωμα μηχανισμού σε ορθογώνια σύστημα αριθμητικά:  
Ο μηχανισμός περιβρέπεται χύρω από το Ο με  $\omega_{OA} = 3 \text{ sec}^{-1}$   
σε την χειρότερη πορεία αυτού του μηχανισμού  $\vec{U}_c, \vec{J}_c \Rightarrow$   
Ευρισκόμενοι:

$$OA = AB = 24 \text{ cm}$$

$$BC = 35 \text{ cm}$$

### ΠΥΞΗ

$$\vec{U}_A = |\vec{\omega}_{OA}| \cdot \vec{OA} = \dots$$

$$|\vec{X}_A| = |\vec{x}_0 + \vec{x}_{OA} + \vec{x}_{AB}| = |\vec{x}_0| - |\vec{\omega}_{OA}| \cdot |\vec{OA}|$$

$$\vec{\omega}_{AB} = \vec{\omega}_{BA} = \frac{|\vec{U}_A|}{(P_{AB})} = \frac{|\vec{U}_B|}{(P_{BA})} = \frac{|\vec{U}_C|}{(P_{CB})} \Rightarrow \vec{\omega}_{BA} = \dots \text{ Τα } (P \perp B), (P \perp A), (P \perp C) \text{ : χωστά από τριγωνομετρία.}$$

$$\begin{aligned} \vec{X}_B &= \vec{X}_A + \vec{x}_{AB} + \vec{x}_{BC} \\ \vec{x}_{AB} &\Rightarrow \text{αριθμ. } \alpha \\ \vec{x}_{BC} &= \vec{\omega}_{BA} \cdot (BA) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right.$$

• Δραστικός τρόπος επιλογής

$$\vec{X}_B = \vec{X}_A + \vec{x}_{AB} + \vec{x}_{BC}$$

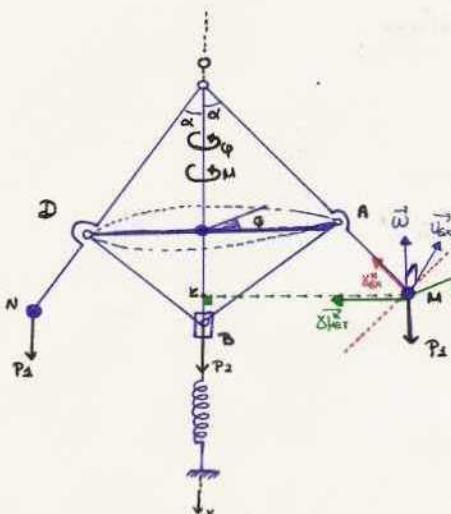
$$|\vec{x}_{BA}| = \omega_{BA} \cdot (BA)$$

$$|\vec{x}_{BA}| = |\vec{\omega}_{BA}| \cdot |\vec{BA}|$$

$$\hookrightarrow \frac{|\vec{x}_{BA}|}{|\vec{BA}|}$$

$$|\vec{\omega}_{BC}| = \frac{|\vec{U}_B|}{(P_{BC})}, \quad \vec{x}_{BC} = \vec{x}_B + \vec{x}_{AC} + \vec{x}_{CB} \Rightarrow \text{πρήγματο λόγω επιβολής.}$$

$$|\vec{x}_{BC}| = \omega_{BC}^2 \cdot (BC)$$

ΔΙΕΚΘΗΣΗ Ι

Στο διπλανό σχήμα ο μηχανισμός αναφέρεται ως γραμμικός πυρήνας. Ο μηχανισμός περιστρέφεται χύρω από του κατακόρυφο ακίνητο αξονα λόγω της επιβαλόμενης περιστροφής προς Η. Οι σφρίρες Η, Ν επορύθμιστη έχουν βάρος  $P_2$  και επιρρούνται στα ακρατώντας μονάδων ΟΜ και ΟΝ που είναι αρθρώσιμα συνδεδεμένοι στο σημείο Ο. Η γεύγινη Β βάρους  $P_2$ , είναι αρθρώσιμη συνδεδεμένη με τους μονάδων ΒΑ και ΒΔ, οι οποίοι είναι συνδεδεμένοι με τις αρθρώσεις Α, Δ., και μετους μονάδων ΟΜ, ΟΝ. Η γεύγινη Βερεται προς τα κάτω με το ελαστήριο Κ. Με τη μεταβολή

της φορτίσεως της μηχανής αλλάζει τη γωνία α του εκτίματος. Η καταστροφούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης του πυρήνα ου η ροπή σφρίνεται του Βεντού Ι. Οι σφρίρες Η, Ν είναι υλικά σημεία και οι μέγες των μονάδων του ελαστηρίου είναι αμελητέες. [ $OA = AB = BD = DC = l$ ,  $OM = ON = b$ ]

Λ. Η. 1

Βαθμός ελευθερίας : 2 { Τα σημεία Μ, Ν μπορούν [i] να περιστρέψουν χύρω α πό των ΟΒ και [ii] με το ελαστήριο (μεσορθούνται) }

Υπάρχουν 2 διαφορικές εξισώσεις.

ΑΡΧΗ ΤΗΝ ΔΥΝΑΤΩΝ ΕΡΓΩΝ (Επεδίνη το πρόβλημα είναι δυνατό και δικτύο σταθικό λαρυγκός) υπόσχιν ότι τις αρθρωτικές συνάθεσης αντιβάτεται προς την κίνηση.

$$\left. \begin{array}{l} M \rightarrow P_1 \\ N \rightarrow P_2 \\ B \rightarrow P_2, I \\ \text{Ελαστήριο} \rightarrow \vec{F} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{δυνάμεις σταθητικές.}$$

Υπολογισμοί Συνάθεσηών

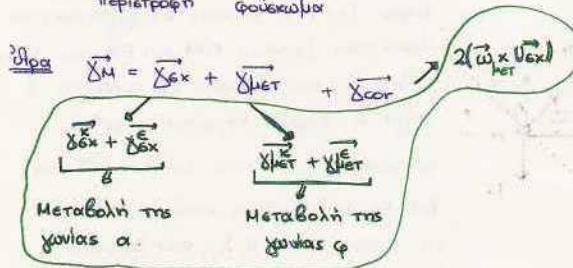
$$\left. \begin{array}{l} |\vec{F}_x| = k |\Delta x| . \text{ Το } \Delta x \text{ εφαρτάται από το } \alpha : \Delta x = x_{B_0} - x_{B_t} \\ x_{B_0} = (\alpha=0)=2l \\ x_{B_t} = (\alpha) = 2l \cos \alpha = (OB) \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta x = 2l - 2l \cos \alpha \Rightarrow \Delta x = 2l (1 - \cos \alpha)$$

$$3 \text{ ipsa} \quad |\vec{F}_x| = 2kl(1 - \cos\alpha)$$

$$\bullet \vec{x}_{Bz} = 2l \cos\alpha \Rightarrow \dot{\vec{x}}_{Bz} = -2l \sin\alpha$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{x}}_{Bz} = -2l \sin\alpha - 2(\dot{\alpha})^2 \cos\alpha$$

$$\bullet \vec{\Delta M} = \underbrace{\text{μετοχική}}_{\substack{\downarrow \\ \text{περιστροφή}}} + \underbrace{\text{εκτική}}_{\substack{\uparrow \\ \text{ροή}}} + \text{coriolis}$$



$$\bullet |\vec{\Delta ex}| = B \cdot \dot{\alpha}^2, \quad |\vec{\Delta e}| = B \cdot \ddot{\alpha}$$

$$\bullet |\vec{\Delta k}| = |\vec{Mk}| \cdot \ddot{\phi}^2 = (B \cdot \sin\alpha) \ddot{\phi}^2$$

$$\bullet |\vec{\Delta NET}| = |\vec{Mk}| \cdot \ddot{\phi} = (B \sin\alpha) \ddot{\phi}$$

$$\bullet |\vec{\Delta cor}| = 2\omega_{\text{per}} \cdot |\vec{v}_{ex}| \sin(\vec{w}_{NET}, \vec{v}_{ex}) = 2 B \ddot{\phi} \dot{\alpha} \cos\alpha$$

Ταξιδιός

$$\vec{\Delta M} = \vec{\Delta ex} + \vec{\Delta e} + \vec{\Delta k} + \vec{\Delta NET} + \vec{\Delta cor}$$

$$\bullet \vec{\Delta M} = -\frac{P_1}{g} \cdot \vec{\Delta M}$$

$$\bullet \vec{\Delta ex} = -\frac{P_1}{g} \vec{\Delta ex}$$

$$\bullet \vec{\Delta ex} = -\frac{P_1}{g} \vec{\Delta ex}$$

$$\bullet \vec{\Delta k} = -\frac{P_1}{g} \vec{\Delta k}$$

$$\bullet \vec{\Delta NET} = -\frac{P_1}{g} \vec{\Delta NET}$$

$$\bullet \vec{\Delta cor} = -\frac{P_1}{g} \vec{\Delta cor}$$

Επιλογή  $(\vec{\Delta B}) = \frac{P_2}{g} (\vec{\Delta B}) = 2 \frac{P_2}{g} l \mid \dot{\alpha}^2 \cos\alpha + \ddot{\alpha} \sin\alpha \mid$

$$\underline{M^{(3)} = I \ddot{\alpha}}$$

Διδούνται τα ποτέ Ν είναι.

$$1] \delta A = 0 \quad \frac{\delta \alpha}{\delta \varphi} = 0, \quad \boxed{M \delta \varphi - 2 \int_{\text{het}}^{\varphi} M k |\delta \varphi| - 2 \int_{\text{het}}^{\varphi} M k |\delta \varphi| + M \int_{\text{het}}^{\varphi} \delta \varphi = 0} \quad (1)$$

Επειδή είναι 2οι εργασίες

Όλες οι άλλες δυνάμεις δεν σηματούργούν εργό.

$$2] \delta A = 0 \quad \delta \alpha = 0, \delta \varphi \neq 0$$

$$\boxed{P_2 \cdot \delta x_B + F_x \cdot \delta x_B + \int \delta x_B - 2 P_1 |Mk| \delta \alpha + 2 \int_{\text{het}}^{\varphi} |Ok| \cdot \delta \alpha - 2 \int_{\text{het}}^{\varphi} |Om| \delta \alpha = 0} \quad (2)$$

$$\delta x_B = -2l \sin \alpha \cdot \delta \alpha$$

$$\begin{aligned} Mk &= Bl \sin \alpha \\ &= l \sin \alpha. \end{aligned}$$

(3)

Δημιουργία

$$\left( I + \frac{2P_1}{g} l^2 \sin^2 \alpha \right) \ddot{\varphi} + \frac{2P_1}{g} \alpha^2 \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{\alpha} \sin \alpha - M = 0$$

και

$$\frac{P_1 B^2 + 2P_2 l^2 \sin^2 \alpha}{g} \ddot{\alpha} - \frac{P_1}{2g} B^2 \dot{\varphi}^2 \sin 2\alpha + \frac{2P_2}{g} l^2 \dot{\alpha}^2 \sin^2 \alpha + 2k l^2 (1 - \cos \alpha) \sin \alpha + (P_1 B + P_2 l) \sin \alpha = 0.$$

\* ----- \*

2ο πρόβλημα ΛΥΣΗΣΕξιδικεύσας Lagrange\* Έχω 2 βαθμούς ελευθερίας : 2 μεταβλήτες:  $\varphi, \alpha$ 

$$\varphi: \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi$$

επικεκτική σύνθεση

$$\alpha: \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \alpha} = Q_\alpha$$

•  $\alpha = \text{σταθερό} \Rightarrow \delta\alpha = 0, \delta\dot{\alpha} \neq 0$

$$\Delta A = M \cdot \delta\dot{\alpha} \Rightarrow Q\dot{\alpha} = M$$

•  $\varphi = \text{σταθερό} \Rightarrow \delta\varphi = 0, \delta\alpha \neq 0$

$$\Delta A = (-P_1 \cdot b \sin\alpha) \delta\alpha + (-P_2 \cdot b \sin\alpha) \delta\alpha - P_2 \delta x_B + F_x \delta x_B$$

$$b \delta\alpha = \delta\varphi \text{ γωνία}$$

$$\begin{aligned} \text{ήπα} \quad \delta\varphi \cdot \sin\alpha \\ x_B = 2l \cos\alpha \\ \delta x_B = -2l \sin\alpha \cdot \delta\alpha \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta A = \left\{ -2 [P_1 b + P_2 l + 2l^2(1 - \cos\alpha)] \sin\alpha \right\} \delta\alpha$$

$$Q\dot{\alpha} = -2 [P_1 b + P_2 l + 2l^2(1 - \cos\alpha)] \sin\alpha$$



### • Κινητική ευέρχεται

$$T = \underbrace{T_1 + T_2}_{\text{Εργαζόμενες}} + T_3 \rightarrow \text{δεύτερη B.}$$

$$T_1 = T_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_1}{g} U_M^2$$

Αλλά  $U_M^2 = \underbrace{U_{\text{het}}^2}_{\vec{U}_{\text{het}} \perp \vec{U}_{\text{ex}}} + U_{\text{ex}}^2 = (b \dot{\varphi} \sin\alpha)^2 + (\dot{b} \dot{\alpha})^2 = \dots = b^2 (\dot{\varphi}^2 \sin^2\alpha + \dot{\alpha}^2)$

$$\underline{\text{Άρχει}} \quad T_1 = T_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_1}{g} b^2 (\dot{\varphi}^2 \sin^2\alpha + \dot{\alpha}^2)$$

$$T_3 = \underbrace{T_3^1}_{\text{Περιστροφή}} + \underbrace{T_3^2}_{\text{Μοταρδού}}$$

$$\begin{aligned} T_3^1 &= \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} U_B^2 = \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} \cdot \dot{x}_B^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_2}{g} (-2l \sin\alpha \cdot \ddot{\alpha})^2 = 2l^2 \alpha^2 \sin^2\alpha \frac{P_2}{g} \\ T_3^2 &= \frac{1}{2} I \cdot \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 \end{aligned} \quad \left. \right\}$$

$$T_3 = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 + 2l^2 \alpha^2 \sin^2\alpha$$

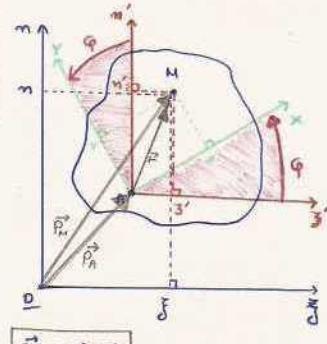
$$\underline{\text{Άρχει}} \quad T = \frac{1}{2} \left( I + \frac{2P_1}{g} b^2 \sin^2\alpha \right) \dot{\varphi}^2 + \frac{P_1 b^2 + 2P_2 l^2 \sin^2\alpha}{g} \dot{\alpha}^2$$

Εστω οριζόντιο οχημα και κινούμενο Axy

Εστω σημείο A (αρχή κινήσεως) και M τυχαία

$M(x,y)$  και  $M(\tilde{x},\tilde{y})$  ως προς τα 2 ευθύγενα

ΣΥΝΤΕΤΟΧΓΙΕΣ	
$\tilde{x}(t) = f_1(t)$	
$\tilde{y}(t) = f_2(t)$	
$\theta(t) = \tilde{\theta}(t)$	
$w(t) = \tilde{w}(t)$	



$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\delta} = \tilde{\delta}_A + x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ m = m_A + x \sin \varphi - y \cos \varphi \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ΣΥΝΤΕΤΟΧΓΙΕΣ ΤΟΥ } M \\ \text{ΩΣ ΤΡΟΣ ΤΟ } \tilde{\delta}_m.$$

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} U_{\tilde{\delta}} = \frac{d \tilde{\delta}_A(t)}{dt} - w(n - m_A) \\ U_m = \frac{d m_A(t)}{dt} + w(\tilde{\delta} - \tilde{\delta}_A) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ΣΥΝΤΕΤΟΧΓΙΕΣ ΤΑΧΥΤΗΤΟΣ ΤΟΥ } M \text{ ΩΣ ΤΡΟΣ ΤΟ } \tilde{\delta}_m$$

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} U_x = U_{A_x} - w y \\ U_y = U_{A_y} + w x \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ΣΥΝΤΕΤΟΧΓΙΕΣ ΤΑΧΥΤΗΤΟΣ ΤΟΥ } M \text{ ΩΣ ΤΡΟΣ ΤΟ } Axy$$

$$\frac{d \tilde{P}_M}{dt} = \frac{d \tilde{P}_A}{dt} + \frac{d \tilde{r}}{dt} \Rightarrow \\ \tilde{U}_M = \tilde{U}_A + (\tilde{w} \times \tilde{r})$$

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} U_{A_x} = \frac{d \tilde{\delta}_A(t)}{dt} \cos \varphi + \frac{d m_A(t)}{dt} \sin \varphi \\ U_{A_y} = -\frac{d \tilde{\delta}_A(t)}{dt} \sin \varphi + \frac{d m_A(t)}{dt} \cos \varphi \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ΣΥΝΤΕΤΟΧΓΙΕΣ ΤΗΣ ΤΑΧΥΤΗΤΟΣ ΤΟΥ } A \text{ ΩΣ ΤΡΟΣ ΤΩΣ } x, y$$

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\delta} = \tilde{\delta}_A + x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ m = m_A + x \sin \varphi - y \cos \varphi \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ΣΥΝΤΕΤΟΧΓΙΕΣ ΤΟΥ } M \\ \text{ΩΣ ΤΡΟΣ ΤΟ } \tilde{\delta}_m$$

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\delta} = \frac{d^2 \tilde{\delta}_A(t)}{dt^2} - \varepsilon(n - m_A) - \omega^2(\tilde{\delta} - \tilde{\delta}_A) \\ \ddot{m} = \frac{d^2 m_A(t)}{dt^2} + \varepsilon(\tilde{\delta} - \tilde{\delta}_A) - \omega^2(n - m_A) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ΣΥΝΤΕΤΟΧΓΙΕΣ ΤΗΣ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗΣ ΤΟΥ } M \\ \text{ΩΣ ΤΡΟΣ ΤΟ } \tilde{\delta}_m$$

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = \ddot{\delta}_{A_x} - \varepsilon y - \omega^2 x \\ \ddot{y} = \ddot{\delta}_{A_y} + \varepsilon x - \omega^2 y \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ΣΥΝΤΕΤΟΧΓΙΕΣ ΤΗΣ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗΣ ΤΟΥ } M \\ \text{ΩΣ ΤΡΟΣ ΤΟ } Axy$$

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\delta}_{A_x} = \frac{d^2 \tilde{\delta}_A(t)}{dt^2} \cos \varphi + \frac{d^2 m_A(t)}{dt^2} \sin \varphi \\ \ddot{\delta}_{A_y} = -\frac{d^2 \tilde{\delta}_A(t)}{dt^2} \sin \varphi + \frac{d^2 m_A(t)}{dt^2} \cos \varphi \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Επιτάχυνση του } A \text{ ΩΣ ΤΡΟΣ ΤΩΣ } x, y.$$

I.II.II :  $U_{\tilde{\delta}} = 0, U_n = 0, U_x = 0, U_y = 0$

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\delta}_0 = \tilde{\delta}_A - \frac{1}{\omega} \cdot \frac{d m_A(t)}{dt} \\ m_0 = m_A + \frac{1}{\omega} \cdot \frac{d \tilde{\delta}_A(t)}{dt} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ΣΥΝΤΕΤΟΧΓΙΕΣ Σ.Ι.Ι.Τ.} \\ \text{ΩΣ ΤΡΟΣ } \tilde{\delta}_m$$

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} x_0 = -\frac{U_{A_y}}{\omega} \\ y_0 = \frac{U_{A_x}}{\omega} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ΣΥΝΤΕΤΟΧΓΙΕΣ Σ.Ι.Ι.Τ.} \\ \text{ΩΣ ΤΡΟΣ } Axy$$

I.II.E :  $\tilde{\delta}_0 = 0, \tilde{\delta}_n = 0, \tilde{x} = 0, \tilde{y} = 0$

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\delta}_A = \tilde{\delta}_A - \frac{d^2 m_A(t)}{dt^2} \varepsilon - \frac{d^2 \tilde{\delta}_A(t)}{dt^2} \omega^2 \\ m_0 = m_A - \frac{d^2 \tilde{\delta}_A(t)}{dt^2} \varepsilon + \frac{d^2 m_A(t)}{dt^2} \omega^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ΣΥΝΤΕΤΟΧΓΙΕΣ Σ.Ι.Ι.Ε.} \\ \text{ΩΣ ΤΡΟΣ ΤΟ } \tilde{\delta}_m$$

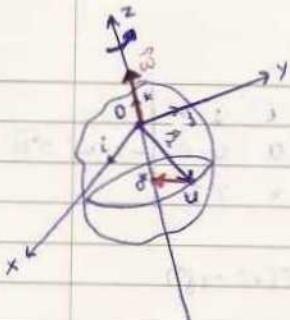
$$(2) \left\{ \begin{array}{l} x_0 = -\frac{\varepsilon \tilde{y}_A \cdot \omega + \tilde{\delta}_{A_x} \cdot \omega^2}{\varepsilon^2 + \omega^4} \\ y_0 = \frac{\varepsilon \tilde{x}_A \cdot \omega - \tilde{\delta}_{A_y} \cdot \omega^2}{\varepsilon^2 + \omega^4} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ΣΥΝΤΕΤΟΧΓΙΕΣ Σ.Ι.Ι.Ε.} \\ \text{ΩΣ ΤΡΟΣ ΤΟ } Axy.$$

Τεχνική:  $\omega_x = \omega_y = 0$  γιατί στη πρεπειαρχία γίνεται ως προς τον  $z$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j} + \vec{0k}$$

προς τον  $z$

προς τον  $z$



$$\vec{\omega} = \vec{\omega} k \quad \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{array} \right| = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j} + \omega \vec{k}$$

$$\|\vec{r}\| = \cos \alpha$$

(Τοις 2<sup>ο</sup> χρήσιμη της οριζόντιας είναι 0 0 ω γιατί)  
το  $\vec{\omega} = \vec{0}_z + \vec{0}_y + \omega \vec{k}$ .

$$\vec{\ddot{r}}_M = \frac{d\vec{U}_M}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\epsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}),$$

γιατί  $\vec{\epsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$  ⇒ ΕΠΙΤΡΟΧΙΑ ΕΠΙΤΟΧΥΝΕΙ

ΕΥΒΙΒΡΑΣΗ  
ΟΠΙΘΑ. ΣΗΜ.

(\*)

$$\text{και } \frac{d\vec{r}}{dt} = (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad \text{γιατί } \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{U}_M = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

\* Η περιήγηση είναι σταθερού προσανατολισμού. Επομένως έχουμε βάση της  $\vec{\omega}(t) = \vec{\omega}_0 + \omega(t) \vec{k}$

$$\text{Τεχνεί } \vec{\omega}(t) = \vec{\omega}_0 \cdot \omega(t) \Rightarrow \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} = \frac{d\vec{\omega}_0}{dt} \omega(t) + \omega(t) \vec{\omega}_0$$

$$\Rightarrow \vec{\omega}(t) = \vec{\omega}_0 + \frac{d\omega(t)}{dt} \vec{k}$$

(\*) Το  $\vec{\omega} \times \vec{r}$  δίνει ένα διάνυσμα καθέτο στο  $\vec{\omega}$  και το  $\vec{r}$   
και λειτουργεί ταυτόπιον με την έρευνα κατευθυντή.  
Αν αυτό γίνεται  $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$  είναι την ευβιβράση της  
επιτροχύνεις (την κεντροβόλο). Δινέχεται στη (2/1).

Θέρα γύρω από έναν σταθερό αίρον είναι:  
 $x_* = -E_y - \hat{\omega} x$   
 $E_y = E_x - \hat{\omega} y$   
 $E_z = 0$ .  
 που προκύπτει από το εξής:

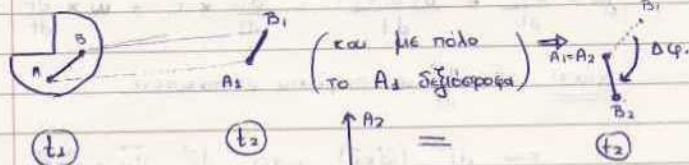
$$\vec{g}_M = \vec{g} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \epsilon \\ x & y & z \end{vmatrix} - \omega^2 \vec{OM} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{g}_M = (-\epsilon y \hat{i} + \epsilon x \hat{j} + \vec{0k}) - \omega^2 (x \hat{i} + y \hat{j})$$

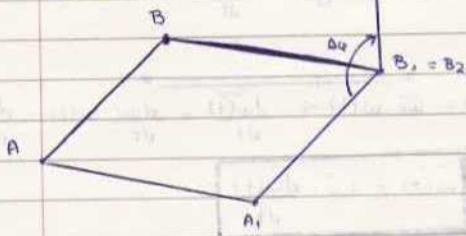
### ΕΠΙΠΕΔΗ ΚΙΝΗΣΗ ΑΠΟΛΥΤΟΣ ΔΙΕΡΕΥΣ ΣΩΜΑΤΟΣ

? Είναι το επίπεδο και το ευθ. τρίγωνα AB.

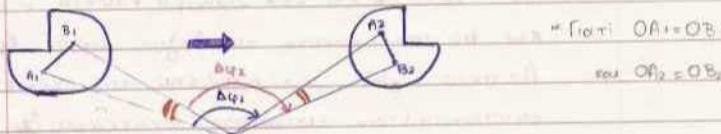
1] Προβολή



2] Προβολή



3] Προβολή



? Είναι στην 3 O (επιγείως πόλος περιεγράφεις)

$$\left. \begin{aligned} * \text{ Ισχουν: } & OA_1 = OA_2 \\ & OB_1 = OB_2 \\ & A_1B_1 = A_2B_2 \end{aligned} \right\} A_1\hat{O}B_1 = A_2\hat{O}B_2$$

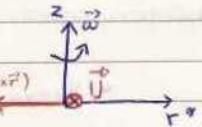
$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow \Delta\varphi_1 = A_1\hat{O}A_2 = A_1\hat{O}B_1 + B_1\hat{O}A_2 \\ \Delta\varphi_2 = B_1\hat{O}B_2 = B_1\hat{O}A_2 + A_2\hat{O}B_2 \end{aligned} \right\} \Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2 = \Delta\varphi$$

MΗΧΑΝΙΚΗ III

- Επειδή  $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2 = \Delta\varphi$  έχω σταθμιαίο πόλο περιεγραφής το O.
- O των n κίνησης είναι βεταυγορίκιο **DEN** έχω πόλο περιεγραφής.

Διανομέας αντίτυπο (11) \*

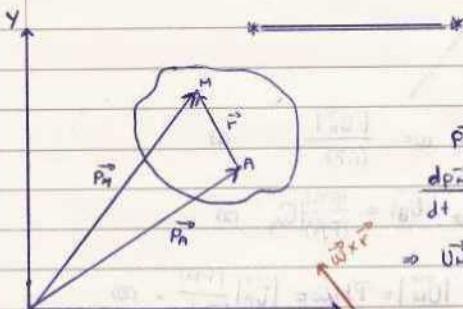
Έστρε:



→ Επιπέδου χαρτιού

→ Κάτιο στο χαρτί επιπέδου

→ // στο χαρτί διανομέα

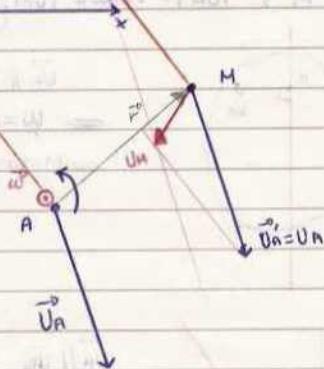


$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{r}$$

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{U}_M = \vec{U}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

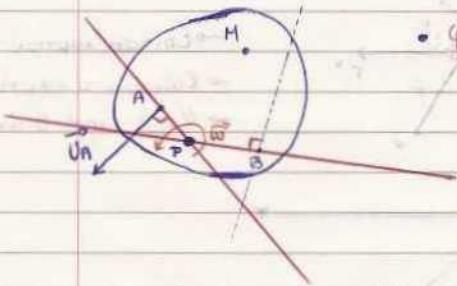
ήπαι

 $\vec{\omega} \times \vec{r}$ 

### ΘΕΩΡΗΜΑ 1

Όταν γκυριζούμε την ταχύτητα ενός οποιουδήποτε σημείου

και την κατευθυνση ενός άλλου (B) τότε υπορρέει να προσδιορίσεις  
την ταχύτητα οποιουδήποτε σημείου του επιπέδου (M)



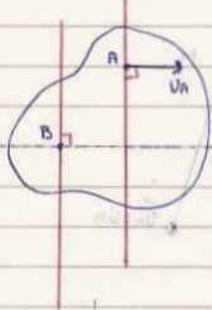
• Τέταρις κάθετη στην  $\vec{U}_A$  και  
στην κατευθυνση των  $\vec{U}_B$

$$\bullet |\vec{U}_H| = \omega(AP) \Rightarrow \omega = \frac{|\vec{U}_A|}{(AP)} \quad (1)$$

$$\bullet |\vec{U}_B| = \omega(PB) \Rightarrow |\vec{U}_B| = \frac{|\vec{U}_P|}{(PA)} \quad (2)$$

$$\text{Άρα } \forall M : |\vec{U}_H| = PM\omega = |\vec{U}_A| \frac{|\vec{PM}|}{(PA)} \quad (3)$$

### Υποπεριττωση 1

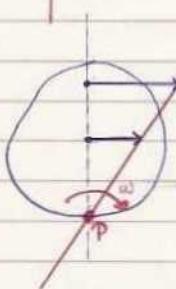


$$\vec{U}_A \parallel \vec{U}_B$$

$$\Rightarrow \omega = 0 \quad \text{αφού } AP = \infty \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \omega = 0$$

$\Rightarrow$  Μεταφορική κίνηση

### Υποπεριττωση 2

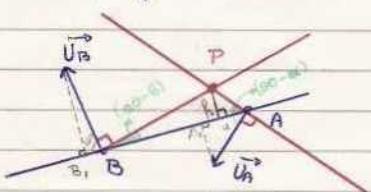


$$\vec{U}_A \parallel \vec{U}_B \quad \text{και στην ιδιαίτερη}$$



ΘΕΡΗΜΑ 2

Οι προβολές των ταχυτήτων των ζευκέων A και B ενός ευδιγράφηκου σημείου πάνω στη διεύθυνση αυτής της ευδας είναι τας μεταξύ τους.

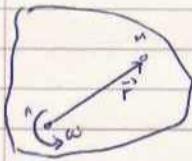


Θέρημα ισότητας ετοις  $\vec{U}_A, \vec{U}_B$

Θέρημα προβολής στην AB+αν

$$|\vec{U}_{AB}| = |\vec{U}_B| \cos \alpha = |(\vec{\omega} \times \vec{P}\vec{A}) \cos \alpha| = |\vec{\omega} \times (\vec{P}\vec{A} \sin(90-\alpha))| = \omega \cdot h .$$

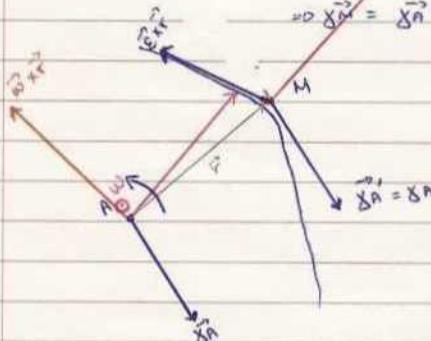
$$|\vec{U}_{BA}| = |\vec{U}_A| \cos B = |(\vec{\omega} \times \vec{P}\vec{B}) \cos B| = |\vec{\omega} \times (\vec{P}\vec{B} \sin(90-\theta))| = \omega \cdot h$$

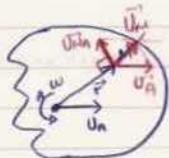


$$\vec{x}_M = \frac{d\vec{U}_M}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{U}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{x}_M = \frac{d\vec{U}_A}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow$$

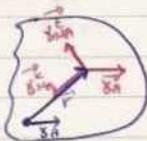
$$\Rightarrow \vec{x}_M = \vec{x}_A + \vec{\epsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$



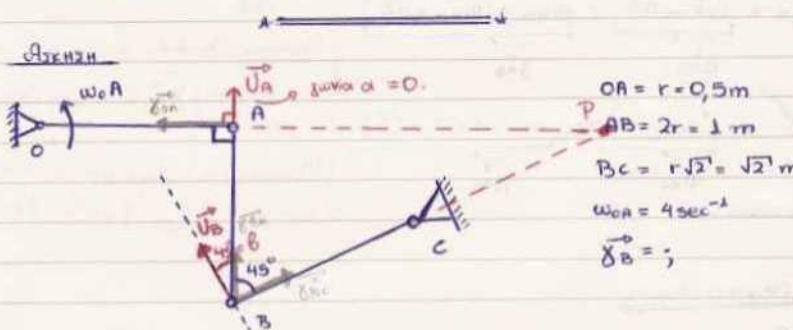


$$\vec{U}_H = \vec{U}_A + \vec{U}_{MA} = \vec{U}_n + \frac{\vec{\omega} \times \vec{r}}{U_{MA}} \quad (1)$$

$$\vec{X}_H^E = \vec{X}_A^E + \underbrace{\vec{\epsilon} \times \vec{r}}_{\vec{U}_{MA}, E} + \underbrace{[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})]}_{\vec{X}_A^E} \quad (2)$$



$$E \varphi \mu = \frac{|\vec{X}_{MA}^E|}{|\vec{U}_{MA}|} = \frac{\epsilon}{\omega^2}$$



1] Υπολογίζω ταχύτητα και επιτάχυνση του A.

$$|\vec{U}_A| = U_n = |\omega_n|(OA) = 4 \cdot 0.5 = 2 \text{ m/sec.} = |\vec{U}_A|$$

Επειδή  $\vec{\omega}_n$  είστερός,  $\epsilon \Rightarrow$  δεν υπάρχει. Έτσι:

$$\vec{X}_A^E = \vec{X}_A^E + \vec{\epsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \Rightarrow |\vec{U}_A| = |\vec{X}_A^E| = |\omega_n|(OA) = 16 \cdot 0.5 = 8 \text{ m/s}^2$$

2] Επειδή το C είναι πολύ περιετροφέτες, το σημείο B έκτελει κυκλική κίνηση με ποσότητα  
της ακτίνας (BC). Άρα  $\vec{U}_B \perp BC$

και από 2<sup>η</sup> διάφορα:  $\begin{cases} |\vec{U}_n| \cos \alpha = |\vec{U}_B| \cos \beta \\ " " \quad " \quad " \end{cases}$

$$\vec{U}_B = \frac{|\vec{U}_n| \cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{2 \cdot 1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \vec{U}_B = 2\sqrt{2} \text{ m/sec}$$

- Αντι το ΤΩ διεύρητα, οι  $\vec{U_A}$  και  $\vec{U_B}$  Ι είναι διανυμετακτικές ακτίνες που ενώνουν τα A, B με τον πόλο.  
Άρισ φέρω Ι στις  $\vec{U_A}$ ,  $\vec{U_B}$  του βρίσκων τον P.

$$\omega_{AB} = \frac{|\vec{U_A}|}{(AP)} = \frac{|\vec{U_B}|}{(BP)} = 2 \text{ sec}^{-1}$$

$$\omega_{BC} = \frac{|\vec{U_B}|}{(BC)} = \frac{2\sqrt{2}}{0,5\sqrt{2}} = 4 \text{ sec}^{-1}$$

\* Το (AB) έχει επιπρόσθια επιτάχυνση χιλιού δεν έχει στο βόρειο πόλο περιστροφής. Έχει στη γη.

- Στα νωρίς βρω το  $\vec{\gamma}_B$  κανω τα είδης:

Γραφω τον τύπο 2 πρώτα με πόλο το A και μετά το C.

$$1) \vec{\gamma}_B = \vec{\gamma}_A + \underbrace{\vec{\epsilon}_{AB} \times \vec{AB}}_{\vec{\delta}_{AB}} + \underbrace{\vec{\omega}_{AB} \times (\vec{\omega}_{AB} \times \vec{AB})}_{\vec{\delta}_{AB}} \quad \left. \begin{array}{l} (3) \\ \text{(Προβαντολίειος από το } B \rightarrow A \\ \text{και μέτρο } |\vec{\gamma}_A| = \omega_{AB}^2 (AB) \end{array} \right\}$$

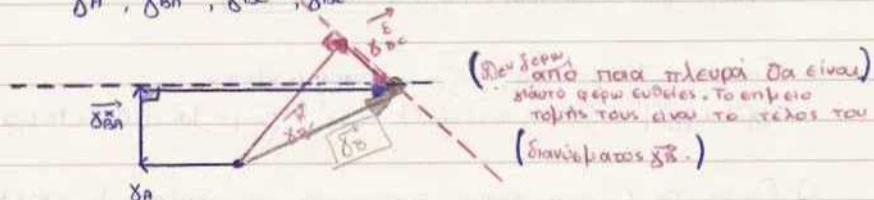
$$2) \vec{\gamma}_B = \vec{\gamma}_C + \underbrace{\vec{\epsilon}_{BC} \times \vec{CB}}_{\vec{\delta}_{BC}} + \underbrace{\vec{\omega}_{BC} \times (\vec{\omega}_{BC} \times \vec{CB})}_{\vec{\delta}_{BC}} \quad \left. \begin{array}{l} (4) \\ \text{(Προβαντολίειος από το } B \rightarrow C \\ \text{και μέτρο } |\vec{\gamma}_C| = \omega_{BC}^2 (BC). \end{array} \right\}$$

επιδερπός πόλος περιστροφής

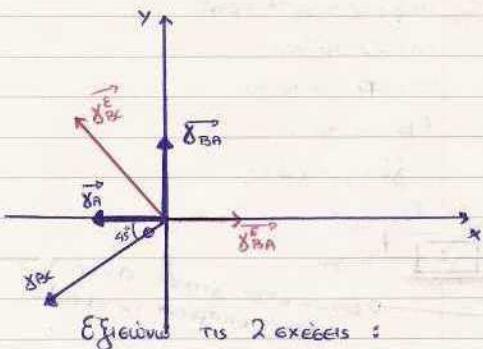
### Γραφική λύση

Επιλέγω ενα εντείο (πόλος χραφτήκατος) και βάζω πάνω το

$\vec{\gamma}_A$ ,  $\vec{\gamma}_{Bn}$ ,  $\vec{\gamma}_{Cn}$ ,  $\vec{\gamma}_{Bc}$



Αναλυτικός τρόπος : Ορίζω το συμβολικό αναφοράς.

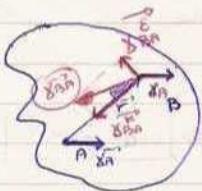


$$-\vec{\delta F}^0 - \vec{\epsilon}_{BC} \times (\vec{CB}) - \vec{\omega}_{BC} \times (\vec{\omega}_{BC} \times (\vec{CB})) + \vec{\delta x}_A + \vec{\epsilon}_{AB} \times \vec{AB} + \vec{\omega}_{AB} \times (\vec{\omega}_{AB} \times \vec{AB}) = 0$$

Δινά τα διανυκταρά τα μεταφέρω επούς αίροντες με το (-) τους.

$$\begin{aligned} \cdot \vec{\delta F}^0 &= 0 \Rightarrow \dots \\ \cdot \vec{\delta F}^y &= 0 \Rightarrow \dots \end{aligned}$$

ΘΕΣΗ (Σταθμώσιος πόλος επιτάχυνσης)



$$\text{ΕΦΗ} = \frac{|\vec{\delta F}^0|}{|\vec{\delta F}^0|} = \frac{|\vec{\epsilon}_{BA}|(BA)}{\omega_{BA}^2 \cdot (BA)} = \frac{\epsilon}{\omega^2} .$$

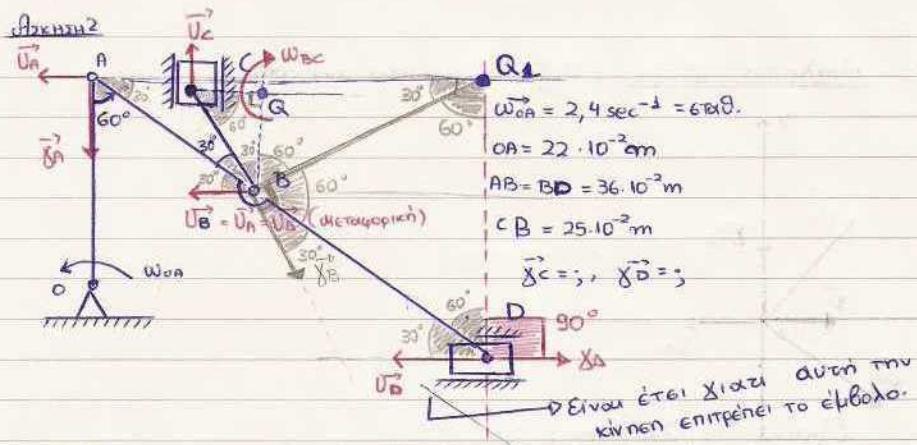
Δινός επιχειρησιακός πόλος επιτάχυνσης λεχεῖ  $\vec{x}_0 = \vec{0}$ .

Πήρα στο Θ πρέπει  $\vec{\delta F}^0 = \vec{\delta F}_{GA}$ .

$$\vec{\delta F}^0 = \vec{\delta x}_A + \underbrace{\vec{\delta x}_{GA} + \vec{\delta x}_{GA}^E}_{\vec{\delta x}_{GA}}$$

$$\text{και } AG = \frac{|\vec{\delta x}_{GA}|}{\sqrt{\epsilon_{GA}^2 + \omega_{GA}^2}}$$

$$\vec{\delta x}_{GA} = \sqrt{(\delta_{GA}^E)^2 + (\delta_{GA}^k)^2}$$



$$|\vec{U}_h| = (\omega_{OA}) \cdot (OA) = 2,4 \cdot 22 \cdot 10^{-2} = 52,8 \text{ m/sec}$$

$$|\vec{x}_A| = |\vec{x}_{AD}| = \omega_{OA}^2 (OA) = 126,72 \text{ m/sec}^2.$$

• Επειδή  $\vec{U}_D \parallel \vec{U}_A$  καὶ {Θεωρήσκα 2}  $\Rightarrow |\vec{U}_D| = |\vec{U}_A|$

$$\text{Επειδή } \vec{U}_D \parallel \vec{U}_A \text{ καὶ } |\vec{U}_D| = |\vec{U}_A| \Rightarrow \vec{U}_A = \vec{U}_D$$

Σχήματα μεταχοροπίκης  
κίνησης του ΑΔ.

• Ισχύει  $\omega(t) = 2t - 1$ .  $\rightarrow \varepsilon = \ddot{\omega}(t) = 2$ .

$\omega_{AD} = 0$   
Στάθμα υπάρχει ο αριθμός

$$\varepsilon_{AD} \mu = \frac{\varepsilon_{AO}}{\omega_{AO}} = \infty \rightarrow \mu = 90^\circ.$$

• Επειδή  $|\vec{x}_A''| = AO \sqrt{\varepsilon_{AQ}^2 + \omega_{AQ}^4} \Rightarrow \varepsilon_{AQ} = \dots \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{AQ} = 2 \text{ sec}^{-2}}$

$$\varepsilon_{DA} x_D = DQ \sqrt{\varepsilon_{AQ}^2 + \omega_{DQ}^4} \Rightarrow$$

Ο (χιούμ το  $Q = 0$  στη ροή)  
επιτάχυνσης,

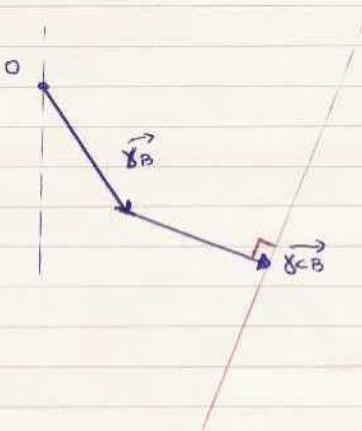
$$\Rightarrow \boxed{x_D = 72 \text{ cm/sec}^2},$$

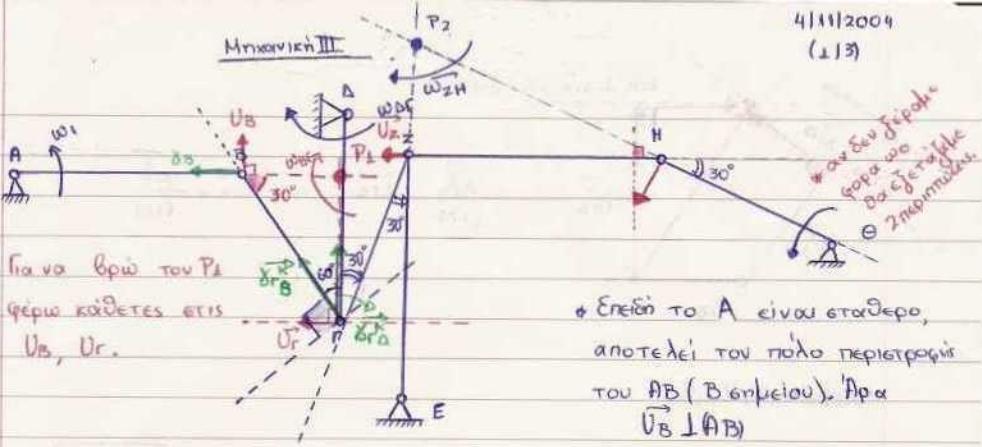
Apa  $\vec{\gamma}^c = \vec{\gamma}_B + \vec{\gamma}_{CB}^k + \vec{\gamma}_{CB}^\epsilon$

kai  $|\vec{\gamma}_{CB}^k| = \omega_{CB}^2 \cdot (CB)$

kai  $|\vec{\gamma}_{CB}^\epsilon| = \epsilon_{CB} \cdot (CB)$

Περικοπής γρίφος





Για να βρω τον  $\vec{v}_{P_1}$   
φέρω κάθετες ετοιμασίες  
 $\vec{v}_B, \vec{v}_r$ .

$$\omega_1 = \text{const}$$

$$\begin{aligned} \text{Γνωστά: } & AB, BF, \Gamma A, \Gamma Z, ZE, ZH, HO \\ & \omega_1 |_{AB} =; \quad \omega_1 |_{ZE} =; \quad \vec{v}_B, \vec{x}|_H =; \\ & \omega_1 |_{BF} = 0 \quad \omega_1 |_{ZH} =; \\ & \omega_1 |_{\Gamma Z} =; \quad \omega_1 |_{HO} =; \end{aligned}$$

\* Επειδή το A είναι σταθερό,  
αποτελεί τον πόλο περιστροφής  
του AB (Β αντικείου). Άρα  
 $\vec{v}_B \perp (AB)$

\* Επειδή το Δ είναι σταθερό.  
αποτελεί τον πόλο περιστροφής  
του ΔΓ (Γ αντικείου). Άρα  
 $\vec{v}_r \perp (\Gamma \Delta)$ .

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (1)$$

$$\vec{v}_M = \vec{x}_A + (\underbrace{\vec{v}_B}_{\delta_{BA}} + (\vec{v}_r \times \vec{r})) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (2)$$

\* Επειδή Θ είναι πόλος περιστροφής  
 $\vec{v}_r \perp (H\Theta)$ .

\* Επειδή E είναι πόλος περιστροφής  
 $\vec{v}_Z \perp (ZE)$

$$|\vec{v}_B| = \omega_1 (AB) \rightarrow \text{γνωστό}$$

$$\text{και } |\vec{v}_B| \cos 60^\circ = |\vec{v}_r| \cos 30^\circ \Rightarrow$$

$$|\vec{v}_r| = \omega_1^2 (AB) \rightarrow \text{γνωστό}$$

$$|\vec{v}_B| \frac{1}{2} = |\vec{v}_r| \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |\vec{v}_r| = |\vec{v}_B| \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \text{γνωστό}$$

$$\vec{\omega}_{BF} = \frac{|\vec{v}_B|}{(\Delta r)} \rightarrow \text{γνωστό} \quad \text{αφού } |\vec{v}_r| = |\vec{v}_B| \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\vec{v}_{BF} = \frac{|\vec{v}_B|}{(BP_1)} = \frac{|\vec{v}_r|}{(\Gamma P_1)} \rightarrow \text{γνωστό}$$

$$\rightarrow \vec{\omega}_{BF} \times (\vec{\omega}_{BF} \times \vec{BF})$$

$$\vec{x}_r = \vec{x}_B + \vec{x}_{FB} + \vec{x}_E \quad (\alpha_1)$$

$$\vec{x}_r = \vec{x}_B + \vec{y}_{FB} + \vec{y}_E \quad (\alpha_2)$$

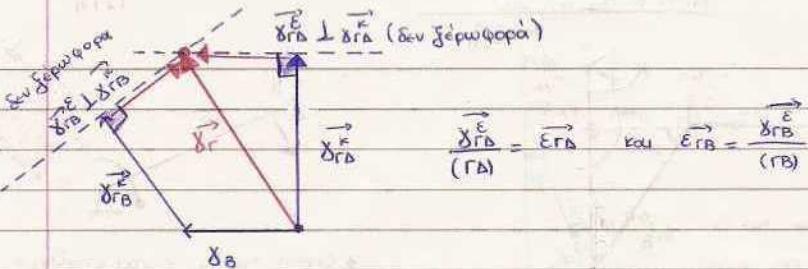
Το  $\Delta$  δεν εκτελεῖ

$$*\text{Ενημ} \quad \vec{y}_{FB} = \vec{\omega}_{FB}^2 (\Gamma B)$$

$$\vec{y}_{FB} = \vec{\omega}_{FB}^2 (\Gamma \Delta) \cdot$$

Η τετραγωνική κίνηση

αφού είναι σταθ.  
πόλος περιστροφής.



• Αντικείμενα Z, H, Θ.

$$|\vec{U}_z| = |\vec{U}_r| \quad \text{Αυτό αποδεικνύεται ότι } rZ \Rightarrow \text{μεταχρονική} \Rightarrow [\vec{\omega}_{rz} = \vec{0}]$$

Αντικείμενο: Εάν  $\vec{U}_z$  ήταν προς τα δεξιά τότε η θα είχατε θλιψη (καθημερινή κλπ.). Γιατί  $\vec{U}_z$  είναι προς τα αριστερά.

• Οπους  $\vec{\omega}_r \neq 0$  γιατί  $\vec{\omega}_z$  στιγματικά γυνικά ταχύτητα.

$$\left( \begin{array}{l} \text{π. ex. αν } \omega(t) = 2t \Rightarrow \text{ τότε } \omega\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \\ \text{αλλά } \varepsilon(t) = \omega'(t) = 2 \neq 0 \end{array} \right)$$

• Βρίσκω την  $\vec{\omega}_E$

$$\vec{\omega}_z = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_{rz} + \vec{\omega}_{zz}^E \quad (\alpha_2)$$

$$\vec{\omega}_z = \vec{\omega}_r^E + \vec{\omega}_{ZE}^E + \vec{\omega}_{ZE}^E \quad (\beta_2) \quad \rightarrow \vec{\omega}_r^E = 0 \quad \text{γιατί } E \text{ σταθ.}$$

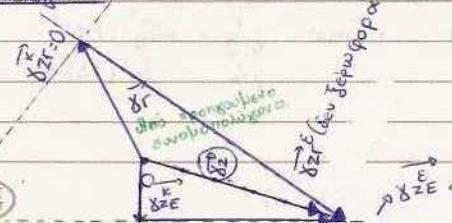
$$\vec{\omega}_{rz} = \vec{\omega}_{rz}^E (Zr) = 0 \quad (\text{αρχικά μεταχρονική κίνηση } \vec{\omega}_{rz}^E = 0).$$

(3)

$$\text{Παλαιά } \vec{\omega}_{rz}^E \perp \vec{\omega}_{rz}^E \quad \text{kou} \quad \vec{\omega}_{ZE}^E \perp \vec{\omega}_{ZE}^E \quad (\text{Επειδή } \vec{\omega}_{rz}^E = 0 \rightarrow \vec{\omega}_{ZE}^E \perp Zr)$$

$$\text{kou} \quad \vec{\omega}_{ZE}^E = \vec{\omega}_{ZE}^E (ZE) = \left[ \frac{|\vec{U}_z|}{(ZE)} \right]^2 \quad \frac{|\vec{U}_r|^2}{(ZE)^2} (ZE) = \frac{|\vec{U}_r|^2}{(ZE)} \rightarrow \text{χωνεύτο.}$$

Θυμοβολεύω



SKAG

$$|\vec{U}_H| \cos 60^\circ = |\vec{U}_z| \cos 0 \Rightarrow |\vec{U}_H| \frac{1}{2} = |\vec{U}_z| \Rightarrow |\vec{U}_H| = 2 |\vec{U}_z|.$$

$$\boxed{\frac{|\vec{U}_H|}{(\text{Hz})} = \omega_{\text{HO}}}$$

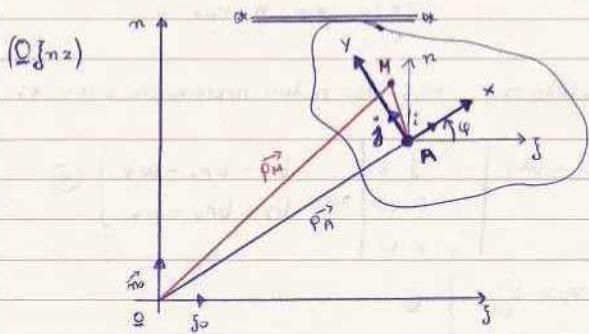
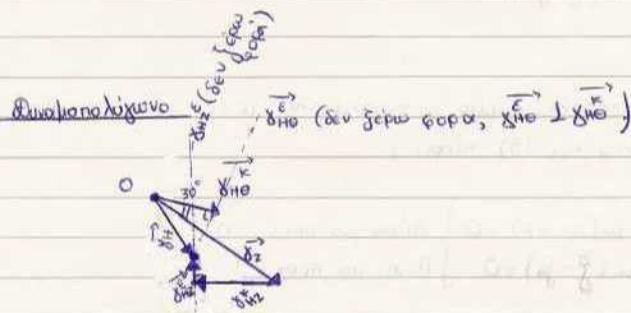
$$\vec{x}_H = \vec{x}_z + \vec{x}_{\text{Hz}}^k + \vec{x}_{\text{Hz}}^e \quad (\text{α3})$$

$$\vec{x}_H = \vec{x}_e + \vec{x}_{\text{HO}}^k + \vec{x}_{\text{HO}}^e \quad (\text{β3})$$

$\vec{x}_{\text{Hz}}^k = (\omega_{\text{Hz}}^2) (\text{Hz}) \Rightarrow$  Το  $\omega_{\text{Hz}}^2$  το βρίσκω με το στιχματικό πόλο

περιετροφής. Φέρω τις κάθετες προεκτάσεις.

P<sub>2</sub> ο πόλος.



$$\begin{aligned} j_A &= f_1(t) & \vec{p}_H &= \vec{p}_A + \vec{r} \quad (1) \quad \left| \frac{d}{dt} \right| \Rightarrow \vec{U}_H = \frac{d\vec{p}_H}{dt} = \frac{d\vec{p}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (2) \\ m_A &= f_2(t) \\ p(t) &= f_3(t) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{j} = \vec{j}_A + x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ m = m_A + x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{array} \right\} \quad (3) \end{aligned}$$

$$\text{Δημο} \quad \vec{U}_H = \vec{U}_n + \vec{\omega} \times \vec{r} \Rightarrow \vec{U}_H = \vec{U}_R + \vec{\omega} \times (\vec{p} - \vec{p}_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{U}_H = \frac{d\vec{p}_n}{dt} + \begin{vmatrix} \vec{j}_A & \vec{n} & \vec{j}_n \\ 0 & 0 & \omega \\ \vec{j} - \vec{j}_A & n - n_A & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} U_j &= \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{j}_A}{dt} - \omega(n - n_A) \\ U_n &= \frac{dn}{dt} = \frac{d n_A}{dt} + \omega(\vec{j} - \vec{j}_A) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad (3)$$

Στριγκαίος πόλος περιστροφής. Αντίκειο σημείου γύρης  $\omega = 0$

Η παραπάνω είναι διαδικασία του (3) τύπου =

$$\begin{aligned} U_j &= 0 \Rightarrow \frac{d\vec{j}_n}{dt} - \omega(n - n_A) = 0 \\ U_n &= 0 \Rightarrow \frac{dn}{dt} + \omega(\vec{j} - \vec{j}_A) = 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Λύνεται ως πόλος } n \\ \text{Λύνεται ως πόλος } \vec{j} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \vec{j} &= \vec{j}_A - \frac{1}{\omega} \frac{dn_A}{dt} \\ \Rightarrow n &= n_A + \frac{1}{\omega} \frac{d\vec{j}_A}{dt} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} (4) \quad \text{Τα } \vec{j}, n \text{ είναι οι ευνεταχέλες} \\ \text{του πόλου περιστροφής (στριγκαίου).} \end{array} \right.$$

$$\vec{j} = \vec{j}_P \quad \text{και} \quad n = n_P.$$

Η παραπάνω είναι η ερώτηση την προβολή του επιγείου πόλου περιστροφής στον  $x$ :

$$\vec{U}_{Rx} = \vec{U}_R + \vec{\omega} \times \vec{r} \Rightarrow \vec{U}_x = U_A + \begin{vmatrix} i & \vec{j} & k \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} U_x = U_{Ax} - \omega y \\ U_y = U_{Ay} - \omega x \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} (5) \Rightarrow U_x &= 0 \\ U_y &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow x_p = \frac{U_{Ay}}{\omega} \\ y_p = \frac{U_{Ax}}{\omega} \end{array} \right\} \quad (6)$$

Θέση θα προσδιορίσω τα  $U_{Ax}, U_{Ay}$

Ισχει  $\vec{F}_n = \vec{J}_A \cdot \vec{J}_c + m \cdot \vec{n} =$  'Όπου  $\vec{J}_c, \vec{n}$ , μονάδια του σταθερού  
ευεξιτότητας ανάρηψας

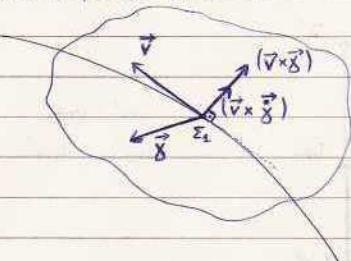
$$\text{Παραγωγή: } \vec{U}_n = \frac{d \vec{J}_A}{dt} \vec{J}_c + \frac{d m}{dt} \vec{n}.$$

$$\text{Άρα } U_{Ax} = \vec{U}_n \cdot \vec{i} = (\vec{J}_A(t) \cos \varphi + m \vec{n}(t) \sin \varphi)$$

$$\text{και } U_{Ay} = \vec{U}_n \cdot \vec{j} = (\dot{\vec{J}}_A(t) \sin \varphi + \dot{m}(t) \cos \varphi)$$

Άσκηση 1

- 1) Να δρεσει  $\vec{v}$  σε ανύκαντα και ικανή ευθύνη για να είναι πια κίνηση υλικού απέριου επιπέδου.



• Δρει  $(\vec{v} \times \vec{g})$  και  $(\vec{v} \times \vec{F})$  και είναι εγγεγάλικά. Θα,  $(\vec{v} \times \vec{g}) \times (\vec{v} \times \vec{F}) = 0$ .

- Πρέπει το κάθετο στην τροχιά διάνυσμα να είναι σταθερής διεύθυνσης.
- Ενα διάνυσμα κάθετο στην τροχιά  $(\vec{v}, \vec{g})$  είναι το  $\vec{v} \times \vec{g}$ . Δρει αυτό, να είναι σταθερής διεύθυνσης
- Ωντασθ  $(\vec{v} \times \vec{g}) \times (\vec{v} \times \vec{g}) = 0$ .  $(\vec{v} \times \vec{g}) \times \frac{d(\vec{v} \times \vec{g})}{dt} = 0$  αφού:

$$\frac{d(\vec{v} \times \vec{g})}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{g} + \vec{v} \times \frac{d\vec{g}}{dt} = \vec{g} \times \vec{g} + \vec{v} \times \vec{g} = \vec{v} \times \vec{g}$$

- Έστω  $\vec{e}$  τυχαίο διάνυσμα. Τότε  $\vec{e} = e \cdot \vec{e}_0$   
Τότε  $\vec{e} = \vec{e}_0 e + e \vec{e}_0$

διάνυσμα παράγοντας του.

Η πάνω περιπτώσεων  $\vec{e} \parallel \vec{e}_0$  είναι να εξουψε  $e \cdot \vec{e}_0 = 0$   
Ωντασθ  $\vec{e}_0 = 0 \Rightarrow \vec{e}_0 = c \rightarrow$  σταθερό.

$$\boxed{\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{g}) \times \vec{g} &= (\vec{a} \cdot \vec{g}) \vec{g} - (\vec{g} \cdot \vec{g}) \vec{a} \\ \vec{a} \times (\vec{g} \times \vec{g}) &= (\vec{a} \cdot \vec{g}) \vec{g} - (\vec{g} \cdot \vec{g}) \vec{a} \\ \vec{a} \times (\vec{g} \times \vec{g}) + \vec{g} \times (\vec{g} \times \vec{a}) + \vec{g} \times (\vec{a} \times \vec{g}) &= 0 \end{aligned}}$$

$$\text{Άρα } (\vec{v} \times \vec{g}) \times (\vec{v} \times \vec{g}) = 0 \Rightarrow$$

$$[(\vec{v} \times \vec{g}) \vec{g}] \vec{v} - [(\vec{v} \times \vec{g}) \vec{v}] \vec{g} = 0 \Rightarrow$$

ΜΕΙΩΣΗ ΧΙΛΟΙΚΟΥ.

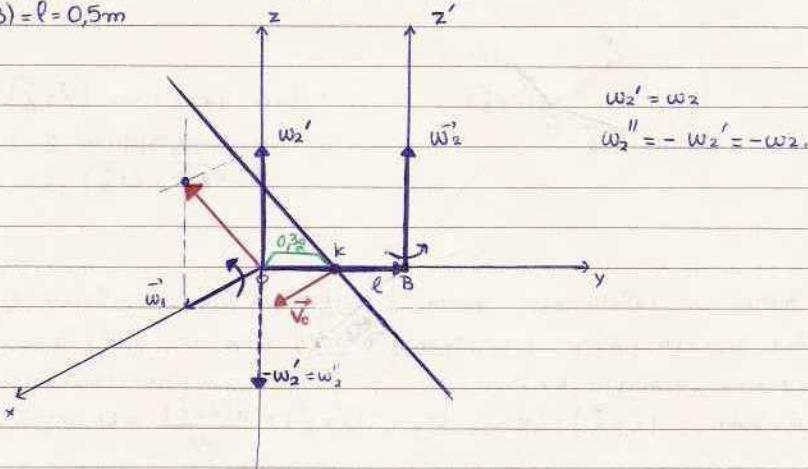
$$[(\vec{v} \times \vec{g}) \vec{g}] \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \left[ (\vec{v} \times \vec{g}) \cdot \vec{g} \right] = 0 \Rightarrow (\vec{v}, \vec{g}, \vec{g}) = 0$$

\*—————\*

ΔΙΣΚΗΣΗ 2

Μέτρο Στη στρέψεται χύρω από τον  $Ox$  με  $w_1 = 3 \text{ sec}^{-1}$ .

Ο αίρας  $Ox$  στρέψεται χύρω από τον  $Bz' \parallel Oz$  με  $w_2 = 4 \text{ sec}^{-1}$   
 $(OB) = l = 0,5 \text{ m}$



$$w_2' = w_2 \\ w_2'' = -w_2' = -w_2.$$

Να ορισθεί η θέση του κεντρικού αίρα  $K_1, K_2$  της κινήσεως του  $\Sigma$ , και η ταχύτητα τυχανού ενέργειας  $K$  του κεντρικού αίρα.

\* Φυλαγώνει όλες τις περιστροφές του ευετήφατος στο  $Oy$  (εφημία ευνετακένη περιστροφή  $\Omega$ ) και γε μία ευνετακένη μεταφορά  $v_0$ . (Πρόσω  $v_0$  σε περιστροφών).

$$\text{Άρα } \vec{\omega} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \rightarrow \omega = \sqrt{w_1^2 + w_2^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ sec}^{-1}.$$

και  $\vec{v}_0 = (\vec{\omega}) \times (\vec{BO}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & w_2 \\ 0 & -l & 0 \end{vmatrix} = l w_2 i + 0j + 0k = 0,5 \cdot 4i = 2i \text{ m/sec}$

$$\bullet r_{OK} = \frac{1}{\omega^2} [\vec{\omega} \times \vec{V}_0] = \frac{1}{25} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,32j$$

\* Άρα η είγειων του κεντρικού αίρα είναι:

$$\underline{r}(\lambda) = \underline{r}_{OK} + \lambda \underline{w}$$

$$\text{και } \underline{V}_K = \underline{v}_0 + \underline{\omega} \times \underline{r}_{OK}$$