ΣΕΜΦΕ-Ηλεκτρολόγοι Μηχ.
Εξέταση στον «Βέλτιστο Έλεγχο», 2016, ΕΠΙΛΟΓΗ ΘΕΜΑΤΩΝ

Θέμα 1. (Μονάδες 2) Να εξαχθούν οι αναγκαίες συνθήκες για το πρόβλημα $\int_{t_1}^{t_2} f(t,x(t),\dot{x}(t))dt \to \min$ με $x(t_1)$ δοθέν και $x(t_2)$ ελεύθερο (f επαρκώς παραγωγίσιμη).

Θέμα 2. (Μονάδες 2) Αν F,Q,R συμμετρικοί πίνακες, δείξτε ότι ο πίνακας-λύση P της Δ.Ε. Riccati $\dot{P} = -PA - A'P + PBR^{-1}B'P - Q,\ P(T) = F$ είναι συμμετρικός και με χρήση της Riccati, επιλύστε το πρόβλημα του ρυθμιστή

$$\dot{x} = 3x + u,\ J(u) = 100x^2(1) + \int_0^1 \left(\frac{19}{4}x^2(t) + u^2(t)\right)dt \to \min,\ x_0 \in \Re \text{ δοθέν}$$

και υπολογίστε την τιμή του αρίστου κόστους.

Θέμα 3. (Μονάδες 2) Να λύσετε το πρόβλημα ελαχίστου χρόνου για το σύστημα

$$\dot{x}_1 = -x_1 + u \quad , \quad \dot{x}_2 = -2x_2 + u$$

με αρχική συνθήκη $x_1(0) = x_2(0) = 2$.

Θέμα 4. (Μονάδες 2) Διερεύνηση του προβλήματος

$$\dot{x}_1 = x_2 u, \dot{x}_2 = x_1 u,\ J(u) = Ax_1^2(1) + Bx_2^2(1) + \int_0^1 u^2(t)dt \to \min,\ (x_1(0), x_2(0)) \in \Re^2 \text{ δοθέντα,}$$

$u(\cdot)$ χωρίς περιορισμούς.

(Υπόδειξη: Δείξτε ότι ο υποψήφιος άριστος έλεγχος είναι σταθερός στο [0,1]).

Θέμα 5. (Μονάδες 3) Διερευνήστε την επίλυση του προβλήματος $\dot{x} = u$, $x \in \Re$, $|u(\cdot)| \le 1$, $J(u) = x^2(T) + \frac{1}{2}\int_0^T \left(u^2(t) - x^2(t)\right)dt$, $x(0), T$ δοθέντα.

Θέμα 6. (Μονάδες 3) Αρχή Μεγίστου για το πρόβλημα

$$\dot{x} = Ax + bu,\ J(u) = g(x(T)) + \int_0^T f_0(x(t),u(t))dt \to \min.$$

Δείξτε ότι οι μεταβολές $\delta x(\cdot), \delta J(\cdot)$ της υποψήφιας λύσης και κόστους, ικανοποιούν: $\frac{d}{dt}(\delta x) = A\delta x + b\delta u$ *με* $\delta x(0) = 0$ *και* $\delta J(u) = g_x(x(t))\delta x(T) + \int_0^T ((f_0)_x \delta x(t) + (f_0)_u \delta u(t))dt$, αντίστοιχα. Στην συνέχεια αποδείξτε την αρχή του μεγίστου για το παραπάνω πρόβλημα.

Θέμα 7. (Μονάδες 3) (α) Να δείξετε ότι αν $u^* : [0,t^*) \to [-1,1]^m$ είναι ένας άριστος έλεγχος για το πρόβλημα ελαχίστου χρόνου του συστήματος $\dot{x} = Ax + Bu$ με $x \in \Re^n$, $A \in \Re^{n\times n}$, $B \in \Re^{n\times m}$, με $x(0) = x_0 \ne 0$, τότε είναι ακρότατος. (β) Έστω το σύστημα $\dot{x} = Ax + Bu$ με $x \in \Re^n$, $A \in \Re^{n\times n}$, $B \in \Re^{n\times m}$. Έστω η αρχική συνθήκη $x(0) = x_0 \ne 0$ να είναι τέτοια ώστε να υπάρχει $T > 0$ και μετρήσιμη συνάρτηση $u : [0,T) \to [-1,1]^m$ για την οποία $\exp(AT)x_0 + \int_0^T \exp(A(T-s))Bu(s)ds = 0$. Να δείξετε ότι το σύνολο $\mathcal{T} = \{t \ge 0 : 0 \in M(t,x_0)\}$, είναι κλειστό και μη κενό.