ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩ
Τομέας Μαθηματικών
Πολυτεχνειούπολη – Ζωγράφου ΑΘΗΝΑ - 157 80
ΤΗΛ. : 772 3291, FAX : 772 1775

ΕΞΕΤΑΣΗ, ΙΟΥΝΙΟΣ 2016

«ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΙΙ»

ΖΗΤΗΜΑ ΠΡΩΤΟ:

α) Να βρεθούν οι χαρακτηριστικές καμπύλες του διαφορικού τελεστή:
$P(D) = x_1^2 D_1^2 + x_2^2 D_2^2 - 2x_1x_2 D_1 D_2 + e^{x_1} D_1 + e^{x_2} D_2$ στον $\mathbb{R}^2$. **(1 μον.)**

β) Να δειχθεί ότι αν u_1 και u_2 είναι συναρτησιακά ανεξάρτητες και πρώτα ολοκληρώματα του $v = (P, Q, R)$ στο Ω τότε οι εξισώσεις $u_1 = c_1$ και $u_2 = c_2$ περιγράφουν συλλογή από ολοκληρωτικές καμπύλες στο Ω. **(1 μον.)**

γ) Δίνεται η $yz_x - xz_y = 2xyz$. Να βρεθεί η γενική της λύση. Να δοθεί καμπύλη της μορφής $C: (f_1(t), f_2(t)), t \in I \subseteq \mathbb{R}$ και δεδομένα $z = f(t), t \in I$ έτσι ώστε το ΠΑΤ

$$\begin{cases} yz_x - xz_y = 2xyz, \\ z = f(t) \text{ στην } x = f_1(t), y = f_2(t), t \in I \end{cases}$$

να έχει τοπικά μοναδική λύση. Δικαιολογείστε την απάντησή σας. Να λύσετε στη συνέχεια το ΠΑΤ. **(1 μον.)**

ΖΗΤΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟ:

Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\begin{cases} \Delta u(x_1, x_2) = e^{-x_1^2 - x_2^2}, \ (x_1, x_2) \in (-\infty, \infty) \times (0, \infty) \\ u(x_1, 0) = e^{-x_1^2}, \ x_1 \in (-\infty, \infty). \end{cases}$$

Η λύση να δοθεί σε ολοκληρωτική μορφή **(2 μον.)**

ΖΗΤΗΜΑ ΤΡΙΤΟ:

α) Να εξεταστεί αν ισχύουν οι συνθήκες του θεωρήματος των Cauchy-Kowalevsky και να βρεθεί η μορφή της λύσης του ΠΑΤ $\begin{cases} u_t = \sin(u)\, u_x \\ u(0, x) = e^x \end{cases}$ γύρω από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων (έως δεύτερη τάξη στο ανάπτυγμα Taylor). **(1.5 μον.)**

β) Έστω ότι η συνάρτηση $u(x)$ είναι αρμονική στο φραγμένο χωρίο $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, συνεχής στο $\bar{\Omega}$ μ $\partial\Omega$ ομαλό σύνορο. Να δοθεί η διατύπωση της ιδιότητας της μέσης τιμής για τη $u(x)$ στο Ω. Στ συνέχεια να αποδειχθεί η αρχή του μεγίστου για τη δοσμένη συνάρτηση. **(2 μον.)**

ΖΗΤΗΜΑ ΤΕΤΑΡΤΟ:

Δίνεται το ΠΑΤ:

$zz_x + z_y = 0, \quad z(x, 0) = -3x$.

α) Να βρεθεί η λύση του. β) Να προσδιοριστούν οι γραμμές στο (x,y) επίπεδο κατά μήκος των οποίων η λύση είναι σταθερή. γ) Υπάρχουν κρουστικά κύματα για $y \geq 0$; **(1.5 μον.)**

Δίνεται η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Laplace:

$$E(x_1, x_2, x_1', x_2') = \frac{1}{4\pi} \ln\left[(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2\right]$$

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**