ΣΧΟΛΗ: Ε.Μ.Φ.Ε. **Ιούνιος 2012**
ΕΞΑΜΗΝΟ: 7ο

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΘΕΜΑ 1: (2.5 μονάδες)
Εστω τ.δ. $X_1,\ldots,X_n$ από την Uniform$(-\theta,\theta+2)$
με σ.π.π. $f(x,\theta)=\dfrac{1}{2(\theta+1)}, -\theta<x<\theta+2.$

(α) Να βρεθεί επαρκής στατιστική συνάρτηση για το θ . Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
(β) Τι άλλες επαρκείς στατιστικές συναρτήσεις υπάρχουν για το θ εκτός αυτής που βρήκατε στο ερώτημα (α)?
(γ) Να βρεθεί εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφάνειας (ΕΜΠ) του θ.

ΘΕΜΑ 2 (2.5 μονάδες)
Έστω $X_1,\ldots,X_n$ τυχαίο δείγμα από την κατανομή με σ.π.π.

$$f(x,\mu,\sigma)=\frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(\log x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \; x>0.$$

(α) Να βρεθεί η κατανομή των τ.μ. $W_i=\log(X_i), i=1,\ldots,n$.

(β) Με τη βοήθεια του (α) να κατασκευαστεί Δ.Ε. με σ.ε. $1-a$ για το μ όταν το σ^2 είναι άγνωστο.

ΘΕΜΑ 3 (3 μονάδες)
Έστω $X_1,\ldots,X_n$ τυχαίο δείγμα από την κατανομή με σ.π.π.

$$f(x,\theta)=(\theta+1)x^{\theta}, \; 0<x<1.$$

(α) Να βρεθεί ο πληροφοριακός αριθμός του Fisher για το θ.
(β) Να βρεθεί το κάτω φράγμα Cramer-Rao για τη διασπορά των αμερόληπτων εκτιμητριών του θ.
(γ) Να βρεθεί το κάτω φράγμα Cramer-Rao για τη διασπορά των αμερόληπτων εκτιμητριών της παραμέτρου $\tau(\theta)=1/(\theta+1)$.
(δ) Να βρεθεί η Α.Ε.Ε.Δ. για την $\tau(\theta)$. Επιτυγχάνει το κάτω φράγμα?

ΘΕΜΑ 4 (2 μονάδες)
Έστω $X_1,\ldots,X_n$ τυχαίο δείγμα από την κατανομή $N(0,\sigma^2)$.

(α) Να βρεθεί ο ισχυρότατος έλεγχος μεγέθους α για τις υποθέσεις $H_0:\sigma^2=1$ έναντι της $H_1:\sigma^2=\sigma_1^2>1$.

(β) Να βρεθεί ο ομοιόμορφα ισχυρότατος έλεγχος μεγέθους α για τις υποθέσεις $H_0:\sigma^2\geq 1$ έναντι της $H_1:\sigma^2<1$.

Να αναφερθείτε σε ότι θεωρήματα χρησιμοποιήσετε (για όλα τα θέματα) χωρίς απόδειξη.
* Διάρκεια Εξέτασης: 2 ½ h*

Διωνυμικη $f(x)=\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}, x=0,1,...,n$	$E(X)=np,\ Var(X)=np(1-p)$
Γεωμετρικη $f(x)=p(1-p)^{x-1},\ x=1,2,...$	$E(X)=\frac{1}{p}, Var(X)=\frac{1-p}{(p)^2}$
Poisson $f(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!},\ x=0,1,...$	$E(X)=\lambda, Var(X)=\lambda$
Κανονικη $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ x\in R$	$E(X)=\mu, Var(X)=\sigma^2$
Γαμμα $f(x)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{a-1}e^{-\beta x},\ x>0$ $\Gamma(\alpha)=(a-1)!$ για $\alpha\in Z$	$E(X)=\frac{\alpha}{\beta}, Var(X)=\frac{\alpha}{\beta^2}$
Εκθετικη $f(x)=\lambda e^{-\lambda x},\ x>0$	$E(X)=\frac{1}{\lambda}, Var(X)=\frac{1}{\lambda^2}$