ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ, 30/6/2005

ΖΗΤΗΜΑ 1. Έστω $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ένα σύνολο προτασιακών μεταβλητών και έστω Σ το σύνολο των προτασιακών τύπων που περιέχουν ως προτασιακές μεταβλητές ακριβώς τις $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Δείξτε πως είναι δυνατόν σε κάθε $\phi \in \Sigma$ να αντιστοιχήσουμε μια συνάρτηση Boole k-θέσεων (ή αληθοπίνακα) $\mathcal{B}_\phi$ που να πραγματοποιείται από τον ϕ. Αντιστρόφως, δείξτε ότι για κάθε συνάρτηση Boole k-θέσεων $\mathcal{B}$ υπάρχει $\phi \in \Sigma$ ώστε $\mathcal{B}$ να πραγματοποιείται από τον ϕ.

Εάν $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \ldots$ είναι μια άπειρη ακολουθία προτασιακών τύπων του Σ έτσι ώστε για κάθε n να έχουμε $\phi_n \models \phi_{n+1}$ τότε δείξτε ότι υπάρχει N τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq N$ έχουμε $\phi_n \models \phi_{n+1}$ και $\phi_{n+1} \models \phi_n$. !??

ΖΗΤΗΜΑ 2. Έστω ότι ορίζουμε στον προτασιακό λογισμό ένα τυπικό σύστημα, έστω $\mathcal{Q}$, ως εξής:

Λογικά αξιώματα: Όλοι οι προτασιακοί τύποι της μορφής

1. $\phi \to (\psi \to \phi)$
2. $(\neg\phi \to \psi) \to ((\neg\phi \to \neg\psi) \to \phi)$

Κανόνες απαγωγής: Modus Ponens

Στο σύστημα αυτό $\mathcal{Q}$ ορίστε τί είναι απόδειξη από το σύνολο των μη λογικών αξιωμάτων T.

Αποδείξτε ότι αν σ' αυτό το σύστημα το σύνολο T είναι ασυνεπές, δηλαδή υπάρχει ψ ώστε $T \vdash \psi$ και $T \vdash \neg\psi$, τότε για κάθε προτασιακό τύπο ϕ έχουμε ότι $T \vdash \phi$. (εδώ το $\vdash$ σημαίνει «αποδεικνύεται στο $\mathcal{Q}$»)

ΖΗΤΗΜΑ 3. 1) Σε μια πρωτοβάθμια γλώσσα εξηγήστε πότε η εμφάνιση μιας μεταβλητής είνα δεσμευμένη και πότε ελεύθερη. Πότε μια μεταβλητή x στον τύπο ϕ είναι αντικαταστάσιμη από τον όρο t; Δώστε ένα παράδειγμα στο οποίο η x δεν είναι αντικαταστάσιμη από τον όρο t στον τύπο ϕ και ο τύπος $\forall x\phi \to \phi(t/x)$ δεν είναι έγκυρος.

2) Θεωρήστε τη γλώσσα $\mathcal{L} = \{<, =\}$, όπου $<$ είναι σύμβολο κατηγορήματος 2-θέσεων. Γράψτε δύο προτάσεις ϕ_1 και ϕ_2 της $\mathcal{L}$ ώστε κάθε ερμηνεία $\mathcal{A}$ της $\mathcal{L}$ που ικανοποιεί τις προτάσεις αυτές να είναι αυστηρή μερική διάταξη (δηλ. η $<^{\mathcal{A}}$ είναι μη-αυτοπαθής και μεταβατική). Δώστε παραδείγματα πεπερασμένων και άπειρων μοντέλων του συνόλου $\{\phi_1, \phi_2\}$. Έστω $n \in \mathbb{N}$· γράψτε μια πρόταση ϕ έτσι ώστε κάθε ερμηνεία της $\mathcal{L}$ που την ικανοποιεί να έχει τουλάχιστον n (το πλήθος) στοιχεία. Χρησιμοποιώντας κατάλληλα το θεώρημα της συμπάγειας αποδείξτε ότι δεν υπάρχει σύνολο προτάσεων Σ ώστε αν $\mathcal{A}$ είναι ερμηνεία της $\mathcal{L}$ τότε

$$\mathcal{A} \text{ μοντέλο του } \Sigma \Leftrightarrow \mathcal{A} \text{ είναι πεπερασμένη αυστηρή μερική διάταξη.}$$

Σ ικανοποιήσιμο $\Leftrightarrow$ Σ πεπερ. ικανοποίησιμο ;

$\exists^{n} x[(x<a) \vee (x<a_2) \vee \neg(x<a_n)]$

$\forall$ πεπερασμένο υποσύνολο υπάρχει απονομή που να τον ικανοποιεί

$\neg(x<x)$

$\neg(x<x)$

$((x<y) \wedge (y<z)) \to$

ΖΗΤΗΜΑ 4. Θεωρήστε τη γλώσσα του προτασιακού λογισμού που περιέχει μόνον τον σύνδεσμο $\rightarrow$. Ορίστε τι είναι ακολουθητικό και πότε ένα ακολουθητικό είναι έγκυρο. Διατυπώστε τους κανόνες Gentzen για τον σύνδεσμο $\rightarrow$ και εξηγήστε τι είναι απόδειξη ενός ακολουθητικού στο σύστημα αυτό. Αποδείξτε ότι αν ένα ακολουθητικό είναι έγκυρο τότε υπάρχει απόδειξη Gentzen αυτού του ακολουθητικού. Πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το σύστημα Gentzen για βρούμε τη διαζευκτική κανονική μορφή ενός προτασιακού τύπου ϕ;

Απόδ.?

ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ 2.30 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!