ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
1η Σειρά Ασκήσεων στη "Μαθηματική Ανάλυση Ι"

ακαδ. έτος 2015–16

1. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου συνάρτησης, δείξτε ότι

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = 0\,.$$

Δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ να βρεθεί $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in D := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ με $0 < |x| < \delta$ να ισχύει

$$\left| \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \right| < \varepsilon\,.$$

2. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση με $|f(x)| \le M$ για κάθε $x \in [0,1]$ και τέτοια ώστε

$$f(ax) = bf(x)\,, \quad \text{για } 0 \le x \le \frac{1}{a} \quad \text{και } a, b > 1\,.$$

(α′) Πρώτα δείξτε ότι

$$f(a^n x) = b^n f(x)\,, \quad \text{για } 0 \le x \le \frac{1}{a^n},\ n \in \mathbb{N}^*$$

και στη συνέχεια ότι

$$|f(x)| \le M\frac{1}{b^n}\,, \quad \text{για } 0 \le x \le \frac{1}{a^n},\ n \in \mathbb{N}^*\,.$$

(β′) Δείξτε ότι $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$.

3. Έστω $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, τέτοια ώστε

$$g(xy) = g(x) + g(y)\,, \quad \text{για κάθε } x, y > 0\,.$$

Δείξτε ότι $g(x) = a \ln x$, για κάποιο $a \in \mathbb{R}$ και για κάθε $x > 0$.
Υπόδειξη. Θεωρείστε τη συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(t) := g(e^t)$ και εφαρμόστε το Παράδειγμα 2.5, "**Μαθηματική Ανάλυση Ι**(Μια εισαγωγή με παραδείγματα και ασκήσεις), Γ. Σαραντόπουλος ".

4. (α′) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στα σημεία 0 και 1 και τέτοια ώστε

$$f(x^2) = f(x)\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

(i) Δείξτε ότι $f(-x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right) = f(x)\,, \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty) \text{ και για κάθε } n \in \mathbb{N}\,.$$

(ii) Δείξτε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

(β′) Δώστε ένα παράδειγμα μη σταθερής συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x^2) = f(x)\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

5. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ είναι φραγμένες.

6. Δείξτε ότι η εξίσωση: $x^2 \cos x + x \sin x = -1$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\mathbb{R}$.

7. Έστω $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ συνεχής συνάρτηση, τέτοια ώστε

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda < 1 \,.$$

Δείξτε ότι $f(x_0) = x_0$, για κάποιο $x_0 \in [0, +\infty)$.
<u>*Υπόδειξη*</u>. Αν $f(0) > 0$, θεωρείστε τη συνάρτηση $g(x) := f(x) - x$.

8. Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. Δείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$f(f(x)) = \lambda x^{25} \,, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \,,$$

αν και μόνο αν $\lambda > 0$.
<u>*Υπόδειξη*</u>. Αν υπάρχει τέτοια συνεχής συνάρτηση f, δείξτε ότι η f θα είναι $1 - 1$ και επί. Επομένως, από γνωστή πρόταση η f θα είναι γνήσια μονότονη.

Παράδοση των ασκήσεων έως 11/1/2016.