ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Εξετάσεις στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

7 Μαρτίου, 2009

Θέμα 1. (α′) Έστω (A_n) ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου Lebesgue m^*, να αποδειχθεί ότι

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) .$$

(0,8 μον.)

(β′) Ως γνωστόν, υπάρχει ακολουθία (E_n) συνόλων ξένων μεταξύ τους που δεν είναι Lebesgue μετρήσιμα, $E_n \subset (-1,2)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) ,$$

όπου $m^*(E_n) = m^*(E) > 0$ και E είναι το σύνολο του Vitali στο $(0,1)$.
Δώστε ένα παράδειγμα φθίνουσας ακολουθίας (A_n) υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $m^*(A_1) < \infty$ και

$$m^*\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \lim_{n\to\infty} m^*(A_n) .$$

(1 μον.)

Λύση.

(α′) Βλέπε τις σημειώσεις του μαθήματος.

(β′) Έστω

$$A_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k .$$

Τότε $m^*(A_n) < \infty$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και η (A_n) είναι φθίνουσα ακολουθία υποσυνόλων του $(-1,2)$. Επομένως, η $(m^*(A_n))$ είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών και

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k = \emptyset .$$

Επίσης,

$$m^*(A_n) \geq m^*(E_n) = m^*(E) > 0 , \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Άρα,

$$m^*\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0 < m^*(E) \leq \lim_{n\to\infty} m^*(A_n) .$$

■

Θέμα 2. (α′) Αν (A_n) είναι αύξουσα ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων συνόλων, τότε

$$\lim_{n\to\infty} m(A_n) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ιδιότητα του μέτρου Lebesgue, να αποδειχθεί ότι αν (A_n) είναι φθίνουσα ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων συνόλων, με $m(A_1) < \infty$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} m(A_n) = m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

(0,7 μον.)

(β′) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : A \subset \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη και πεπερασμένη σχεδόν παντού στο Lebesgue μετρήσιμο σύνολο A, με $m(A) < \infty$. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $B \subset A$, τέτοιο ώστε $m(A \setminus B) < \varepsilon$ και η f είναι φραγμένη στο B (ο περιορισμός της f στο B είναι φραγμένη συνάρτηση). (1 μον.)

(γ′) Έστω το διάστημα $I = (0,1)$. Αν το $E \subset I$ είναι μετρήσιμο σύνολο με $m(E) = 1$, να αποδειχθεί ότι το E είναι σύνολο πυκνό στο I.
Αν f είναι μια συνεχής και μη φραγμένη συνάρτηση στο $I = (0,1)$, τότε για κάθε Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο E του I, με $m(I \setminus E) = 0$, ο περιορισμός της f στο E είναι μη φραγμένη συνάρτηση. (1 μον.)

Λύση.

(α′) Βλέπε τις σημειώσεις του μαθήματος.

(β′) Έστω

$$A_n = \{x \in A : |f(x)| > n\}\ ,\ n \in \mathbb{N} \quad \text{και} \quad Z = \{x \in A : |f(x)| = \infty\}\ .$$

Από την υπόθεση είναι $m(Z) = 0$. Επειδή η $|f|$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, η (A_n) είναι φθίνουσα ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων συνόλων, με $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = Z$ και $m(A_1) \le m(A) < \infty$. Επομένως,

$$\lim_{n\to\infty} m(A_n) = m(Z) = 0\,.$$

Άρα, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $m(A_N) < \varepsilon$. Είναι $A_N \subset A$ και αν $B = A \setminus A_N$, τότε το B είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με

$$m(A \setminus B) = m(A_N) < \varepsilon \quad \text{και} \quad |f(x)| \le N\,,\ \text{για κάθε } x \in B.$$

Δηλαδή, ο περιορισμός της f στο B είναι φραγμένη συνάρτηση.

(γ′) Έστω ότι το E δεν είναι σύνολο πυκνό στο $I = (0,1)$. Τότε υπάρχει $x \in I$ και περιοχή $(x-\delta, x+\delta)$ του x, τέτοια ώστε $(x-\delta, x+\delta) \cap E = \emptyset$. Επομένως, $(x-\delta, x+\delta) \subset I \setminus E$ και αυτό συνεπάγεται ότι

$$0 < 2\delta = m((x-\delta, x+\delta)) \le m(I \setminus E) = m(I) - m(E) = 0\,.$$

Άτοπο. Άρα, το E είναι σύνολο πυκνό στο I.
Έστω f μια συνεχής και μη φραγμένη συνάρτηση στο $I = (0,1)$ (μια τέτοια συνάρτηση είναι η $f(x) = 1/x$) και έστω $M > 0$. Επειδή η συνάρτηση f δεν είναι φραγμένη στο I, υπάρχει $x \in I$ τέτοιο ώστε $|f(x)| > 2M$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $x \in I$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $y \in (x-\delta, x+\delta) \cap I$ είναι $|f(y) - f(x)| < M$. Επομένως, για κάθε $y \in (x-\delta, x+\delta) \cap I$ είναι

$$|f(y)| > |f(x)| - M > 2M - M = M\,.$$

Επειδή από την υπόθεση $m(E) = m(I) = 1$, το E είναι σύνολο πυκνό στο I και κατά συνέπεια υπάρχει $a \in (x-\delta, x+\delta) \cap E$. Γι' αυτό το $a \in E$ είναι $|f(a)| > M$. Άρα, ο περιορισμός της f στο E είναι μη φραγμένη συνάρτηση.

■

Θέμα 3. (α′) Αν $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, όπου οι συναρτήσεις $f_n : E \to [0, \infty]$, $E \in \mathcal{M}$, είναι μετρήσιμες, να αποδειχθεί ότι

$$\int_E f \, \mathrm{d}m = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}m \, .$$

(0,8 μον.)

(β′) Αν p, q είναι φυσικοί αριθμοί, χρησιμοποιώντας το (α′) να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q} \, dx = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+q} + \frac{1}{p+2q} - \frac{1}{p+3q} + \cdots \, .$$

<u>*Εφαρμογή*</u>. Να υπολογιστούν τα αθροίσματα των σειρών

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} \quad \text{και} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \, .$$

(1,2 μον.)

Λύση.

(α′) Βλέπε τις σημειώσεις του μαθήματος.

(β′) Ως γνωστόν $1/(1+t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$, $|t| < 1$ (γεωμετρική σειρά). Επομένως, για $x \in [0, 1)$ είναι

$$\begin{aligned}
\frac{x^{p-1}}{1+x^q} &= x^{p-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{qn} \\
&= x^{p-1} \left[1 - x^q + x^{2q} - x^{3q} + \cdots + x^{2qn} - x^{2qn+q} + \cdots \right] \\
&= x^{p-1} \left[(1-x^q) + x^{2q}(1-x^q) + \cdots + x^{2qn}(1-x^q) + \cdots \right] \\
&= x^{p-1}(1-x^q) \left[1 + x^{2q} + \cdots + x^{2qn} + \cdots \right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \, ,
\end{aligned}$$

όπου

$$f_n(x) = (1-x^q) \, x^{p-1+2nq} \geq 0 \, .$$

<u>*Σημείωση*</u>. Επίσης, χρησιμοποιώντας τη γεωμετρική σειρά $1/(1-t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$, $|t| < 1$, για $x \in [0, 1)$ έχουμε

$$\frac{x^{p-1}}{1+x^q} = \frac{x^{p-1}(1-x^q)}{1-x^{2q}} = x^{p-1}(1-x^q) \sum_{n=0}^{\infty} x^{2qn} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x^q) \, x^{p-1+2nq} \, .$$

Οι συναρτήσεις f_n είναι μη αρνητικές και συνεχείς στο $[0, 1)$, δηλαδή είναι μετρήσιμες στο $[0, 1)$.

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1)} \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\, dm(x) &= \int_{[0,1)} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\, dm(x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{[0,1)} f_n(x)\, dm(x) && \text{(από το (α′))} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (1-x^q)\, x^{p-1+2nq}\, dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \left(x^{p-1+2nq} - x^{p-1+(2n+1)q}\right) dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p+2nq} - \frac{1}{p+(2n+1)q}\right).
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p+2nq} - \frac{1}{p+(2n+1)q}\right).$$

Στην ειδική περίπτωση $p = q = 1$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\, dx = \ln 2\,.$$

Για $p = 1$, $q = 2$ παίρνουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}\,.$$

■

Θέμα 4. Έστω $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση.

(α′) Αν $\alpha > 0$ και $E \in \mathcal{M}$, να αποδειχθεί ότι

$$m\left(\{x \in E : |f(x)| > \alpha\}\right) \leq \frac{1}{\alpha} \int_E |f(x)|\, dm(x)\,.$$

(0,5 μον.)

(β′) Ορίζουμε τη συνάρτηση $\varphi : \mathcal{M} \to [0, \infty]$, με

$$\varphi(E) := \int_E |f|\, dm\,,$$

όπου $E \in \mathcal{M}$. Να αποδειχθεί ότι το φ είναι ένα θετικό μέτρο στη σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$ των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων. (0,7 μον.)

(γ′) Έστω $f \in L_1(E)$, όπου $E \in \mathcal{M}$. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $A_\varepsilon \subseteq E$, τέτοιο ώστε $m(A_\varepsilon) < \infty$ και

$$\int_E |f|\, dm < \int_{A_\varepsilon} |f|\, dm + \varepsilon\,.$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Έστω $A = \{x \in E : f(x) \neq 0\}$ και $A_n = \{x \in E : |f(x)| > 1/n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

(1,5 μον.)

Λύση.

(α′) Βλέπε τις σημειώσεις του μαθήματος (ανισότητα του Chebyshev).

(β′) Βλέπε τις σημειώσεις του μαθήματος (εφαρμογή του θέματος 3(α′)).

(γ′) Έστω $A = \{x \in E : f(x) \neq 0\}$ και $A_n = \{x \in E : |f(x)| > 1/n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Επειδή η $|f|$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, η (A_n) είναι αύξουσα ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του E με $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$. Επειδή από τη (β′) το φ είναι ένα θετικό μέτρο στη σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$ των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων, από γνωστή ιδιότητα του μέτρου

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(A_n) = \varphi(A) \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} |f| \, dm = \int_A |f| \, dm \, .$$

Όμως, για κάθε $x \in E \setminus A$ είναι $f(x) = 0$ οπότε

$$\int_E |f| \, dm = \int_A |f| \, dm \, .$$

Επομένως,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} |f| \, dm = \int_E |f| \, dm \, .$$

Άρα, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\int_E |f| \, dm - \int_{A_N} |f| \, dm < \varepsilon$$

και ισοδύναμα

$$\int_E |f| \, dm < \int_{A_N} |f| \, dm + \varepsilon \, .$$

Επειδή η $f \in L_1(E)$, από την (α′) (ανισότητα του Chebyshev) έχουμε

$$m(A_N) \leq N \int_E |f| \, dm < \infty \, .$$

Αν $A_\varepsilon := A_N$, το σύνολο $A_\varepsilon \subseteq E$ είναι Lebesgue μετρήσιμο τέτοιο ώστε $m(A_\varepsilon) < \infty$ και

$$\int_E |f| \, dm < \int_{A_\varepsilon} |f| \, dm + \varepsilon \, .$$

■

Θέμα 5. (α′) Έστω (A_n) ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Ως γνωστόν

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{και} \quad \liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \, .$$

Αν χ_{A_k} είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου A_k, αποδείξτε μία από τις παρακάτω ισότητες

$$\chi_{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k} = \sup_{k\geq n} \chi_{A_k} \quad \text{και} \quad \chi_{\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k} = \inf_{k\geq n} \chi_{A_k} \, .$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τις παραπάνω ισότητες αποδείξτε μία από τις παρακάτω ισότητες

$$\limsup \chi_{A_n} = \chi_{\limsup A_n} \quad \text{και} \quad \liminf \chi_{A_n} = \chi_{\liminf A_n} \, .$$

(0,8 μον.)

(β′) Διατυπώστε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue. Αν $f \in L_1(\mathbb{R})$ και $x \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(x) := \int_{(-\infty,\, x]} f\, dm\,.$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue, για κάθε πραγματική ακολουθία (x_n) με $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ να αποδειχθεί ότι $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x)$. Δηλαδή ότι η F είναι συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. (1,3 μον.)

Λύση.

(α′) Είναι

$$\begin{aligned}
\chi_{\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k}(x) = 1 &\iff x \in \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \\
&\iff x \in A_k\,, \quad \forall k \geq n \\
&\iff \chi_{A_k}(x) = 1\,, \quad \forall k \geq n \\
&\iff \inf_{k\geq n} \chi_{A_k}(x) = 1\,.
\end{aligned}$$

Παρόμοια είναι η απόδειξη της άλλης ισότητας.
Τότε,

$$\chi_{\liminf A_n} = \chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \chi_{\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} \chi_{A_k} = \liminf \chi_{A_n}\,.$$

Ανάλογη είναι η απόδειξη της άλλης ισότητας.

(β′) Παρατηρούμε ότι

$$F(x_n) = \int_{(-\infty,\, x_n]} f\, dm = \int_{\mathbb{R}} f\chi_{(-\infty,\, x_n]}\, dm\,.$$

Επειδή $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, από την (α′) έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \chi_{(-\infty,\, x_n]} = \chi_{(-\infty,\, x]}$ $\sigma.\pi.$ στο $\mathbb{R}$. Ας σημειωθεί ότι $\lim_{n\to\infty} \chi_{(-\infty,\, x_n]}(t) \neq \chi_{(-\infty,\, x]}(t)$, το πολύ αν $t = x$. Επομένως,

$$\lim_{n\to\infty} f\chi_{(-\infty,\, x_n]} = f\chi_{(-\infty,\, x]} \ \sigma.\pi. \text{ στο } \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \left|f\chi_{(-\infty,\, x_n]}\right| < |f|\,,$$

όπου $f \in L_1(\mathbb{R})$ (επειδή η $f \in L_1(\mathbb{R})$, είναι $|f| < \infty$ $\sigma.\pi.$). Άρα, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \int_{\mathbb{R}} \left(\lim_{n\to\infty} f\chi_{(-\infty,\, x_n]}\right) dm = \int_{\mathbb{R}} f\chi_{(-\infty,\, x]}\, dm = \int_{(-\infty,\, x]} f\, dm = F(x)\,.$$

■

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες