ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
Τομέας Μαθηματικών
Πολυτεχνειούπολη – Ζωγράφου ΑΘΗΝΑ - 157 80
ΤΗΛ.: 772 1774
FAX: 772 1775

ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ
6ο ΕΞ ΣΕΜΦΕ
Σεπτέμβριος 2004

1°) Έστω χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, P_1)$ και $(\Omega, \mathcal{F}, P_2)$ με $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$ όπου $\mathcal{C}$ μή κενή κλάση υποσυνόλων με την ιδιότητα: $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C}$. Υποθέτουμε ότι $P_1(A) = P_2(A) \quad \forall A \in \mathcal{C}$

Δείξτε ότι $P_1 = P_2$.

2°) Έστω χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και τ.μ. X και $X_n, n \in \mathbb{N}$ ορισμένες ό.λ.τόν. Υποθέτουμε ότι $X_n \xrightarrow{\text{σ.β.}} X$. Δείξτε ότι $X_n \xrightarrow{P} X$.

3°) Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χ.π. και ακολουθία <u>ανεξάρτητων</u> τ.μ. $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ με $E(e^{aX_n}) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$, όπου $a \in \mathbb{R}$ με $a \neq 0$. Θέτουμε $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ και $Z_n = \dfrac{e^{aS_n}}{E(e^{aS_n})}$, $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η ακολουθία $\{Z_n, n \in \mathbb{N}\}$ είναι $\mathcal{F}_n$-martingale με $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.

4°) Έστω $X_1, X_2, \ldots$ οι διαδοχικές επιδόσεις ενός αθλητή σε κάποιο άθλημα της καριέρας του κατά την οποία υποθέτουμε ότι οι τ.μ. $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με σ.π.π. $f(x)$, $x > 0$. Έστω $A_n = \{\omega : \max_{k<n} X_k < X_n\}$ το ενδεχόμενο πραγματοποίησης ατομικού ρεκόρ κατά την n-οστή προσπάθεια.

α) Δείξτε ότι τα $A_n, n \in \mathbb{N}$ είναι ανεξάρτητα και ότι $P(A_n) = \frac{1}{n}$.

β) Σε κάθε χρονική στιγμή της άσκησης αυτής της καριέρας του, ο αθλητής προσδοκά ότι θα επιτύχει ατομικό ρεκόρ. Είναι δικαιολογημένη η προσδοκία του; (Υπόδειξη: $\int \cdots \int_{\{0<x_1<x_2<\cdots x_n\}} f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n)\, dx_1 \cdots dx_n = \frac{1}{n!}$ και $\int \cdots \int_{\{0<x_i<x_k \ \forall i=1,\ldots,k-1\}} f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_k)\, dx_1 \cdots dx_k = \frac{1}{k}$).