ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πιθανότητες- 30 Αυγούστου 2016

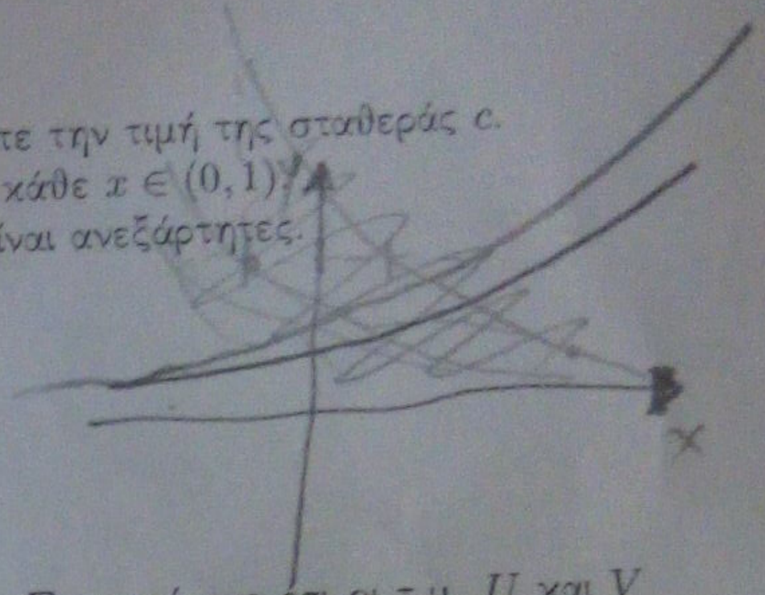
Σ' όλες τις ασκήσεις θα συμβολίζουμε με H, I τις συναρτήσεις

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \geq 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad \text{και} \quad I(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in [0,1] \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ 1 Οι τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.) X, Y έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) την

$$f_{X,Y}(x,y) = cx(1-y)\,H(x)\,H(y)\,I(x+y)$$

α) Δείξτε ότι η περιθώρια σ.π.π. της τ.μ. X είναι η $f_X(x) = \frac{c}{2}x(1-x^2)I(x)$ και υπολογίστε την τιμή της σταθεράς c.
β) Υπολογίστε τη δεσμευμένη σ.π.π. $f_{Y|X}$ και τη δεσμευμένη μέση τιμή $\mathbb{E}[Y|X=x]$, για κάθε $x \in (0,1)$.
γ) Υπολογίστε τη συνδιακύμανση $\mathrm{Cov}(X,Y)$ των τ.μ. X και Y και εξετάστε αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες.



ΑΣΚΗΣΗ 2 Οι X και Y είναι ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ. με σ.π.π.

$$f(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x} H(x),$$

για κάποιο $\lambda > 0$.
α) Ποια είναι η σ.π.π. $f_{X,Y}$ του ζεύγους (X,Y);
β) Ορίζουμε $U = \frac{X}{X+Y}$ και $V = X+Y$. Υπολογίστε τη σ.π.π. $f_{U,V}$ του ζεύγους (U,V). Συμπεράνετε ότι οι τ.μ. U και V είναι ανεξάρτητες και ότι η σ.π.π. της U είναι η $f_U(u) = 6u(1-u)\,I(u)$.
γ) Υπολογίστε την πιθανότητα $\mathbb{P}[X < 2Y]$ με δύο τρόπους:
(i) ως το ολοκλήρωμα της $f_{X,Y}$ πάνω σ' ένα κατάλληλο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.
(ii) γράφοντας το ενδεχόμενο $\{X < 2Y\}$ ως $\{U < u\}$ για κατάλληλο $u \in \mathbb{R}$ και χρησιμοποιώντας το ερώτημα (β).

$u \cdot v$
$(1-u)$
$X < 2Y \iff \frac{X}{Y} < 2 \frac{uv}{v(1-u)} \iff$
uv
$v - uv$
$uv < 2(v-$
$uv < 2v - 2$
$\iff 3uv <$

ΑΣΚΗΣΗ 3 Θεωρούμε μια ακολουθία $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ από ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ. με

$$\mathbb{P}[X_k = \alpha] = \frac{4}{5} \quad \text{και} \quad \mathbb{P}[X_k = -4\alpha] = \frac{1}{5},$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.
α) Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά των τ.μ. X_k.
β) Αν $Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$, δείξτε ότι $Y_n \xrightarrow{d} \Phi_\alpha$, όπου $\Phi_\alpha \sim \mathcal{N}(0, 4\alpha^2)$.
γ) Υπολογίστε τη χαρακτηριστική συνάρτηση (χ.σ.) των τ.μ. X_k, καθώς και τη χ.σ. της τ.μ. Y_n.
δ) Χρησιμοποιήστε τα ερωτήματα (β) και (γ) ή όποιον άλλο τρόπο θέλετε για να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{5} e^{\frac{i\alpha}{\sqrt{n}}} + \frac{1}{5} e^{\frac{-4i\alpha}{\sqrt{n}}} \right)^n.$$

(*Υπόμνηση:* Αν $\Phi \sim \mathcal{N}(0,1)$, τότε $\mathbb{E}[e^{it\Phi}] = e^{-\frac{t^2}{2}}$).

ΑΣΚΗΣΗ 4 Θεωρούμε μια ακολουθία $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ από ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ., ορισμένες σε έναν δειγματικό χώρο Ω, με ομοιόμορφη κατανομή στο $[0,1]$. Ορίζουμε την τ.μ. Z_n έτσι ώστε $Z_n(\omega) = \min_{1\leq k\leq n} X_k(\omega)$, για κάθε $\omega \in \Omega$.
α) Δείξτε ότι η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της Z_n δίνεται από την

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \leq 0 \\ 1-(1-x)^n, & \text{αν } x \in (0,1) \\ 1, & \text{αν } x \geq 1. \end{cases}$$

β) Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της τ.μ. Z_n.
γ) Δείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ έχουμε $\mathbb{P}[\liminf\{Z_n > \epsilon\}] = 0$ και συμπεράνετε ότι $\mathbb{P}[Z_n \to 0] = 1$.
δ) Δείξτε ότι αν ορίσουμε $Y_n = nZ_n$, τότε $Y_n \xrightarrow{d} Y$, όπου η Y ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 1$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Διάρκεια εξέτασης 2,5 ώρες