ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙΙ
ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ
22/1/2016

ΘΕΜΑ 1. (i) (1 μ.) Να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα $\int\int_A \frac{x^2}{1+y^4}dxdy$, όπου A το τρίγωνο που φράσσεται από τις ευθείες

$$y = x, \quad y = -x, \quad y = 1.$$

(ii) (1,5 μ.) Να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα $\int\int_A x dxdy$, όπου $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 2y, \ 0 \leq x \leq y\}$.

ΘΕΜΑ 2. (i) (1,25 μ.)Να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα $\int\int_A \frac{x}{y} e^{x/y} dxdy$, όπου $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 2 \leq xy \leq 4, \ 2x \leq y \leq 5x, \ x > 0, \ y > 0\}$.

(ii) (1,25 μ.) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που βρίσκεται μέσα στον κώνο $z = \sqrt{x^2+y^2}$ και μέσα στο παραβολοειδές $z = 2 - x^2 - y^2$.

ΘΕΜΑ 3. (2,5 μ). Θεωρούμε το στερεό $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$. Να επαληθεύσετε το θεώρημα του Gauss για το Ω και το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(x + \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \, y, \, z\right)$$

πδ

ΘΕΜΑ 4. (i) (1 μ). Έστω $\vec{F} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με

$$\vec{F}(x,y,z) = (3x - 4z, \, 3z^2 - y, \, 2xy^2 - x - 2z)$$

Βρείτε ένα C^2 διανυσματικό πεδίο $\vec{G} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $\nabla \times \vec{G} = \vec{F}$. Stokes

(ii) (1,5 μ). Θεωρούμε τις τριγωνικές επιφάνειες: S_1 με κορυφές στα σημεία $(1,0,0)$, $(0,0,0)$ και $(0,0,1)$. S_2 με κορυφές στα σημεία $(0,0,0)$, $(0,0,1)$ και $(0,1,0)$. S_3 με κορυφές στα σημεία $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ και $(0,0,1)$. Θέτουμε $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Stokes, υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\int\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma$ όπου $\vec{F}$ το πεδίο του υποερωτήματος (i) και $\vec{n}$ το εξωτερικό κάθετο διάνυσμα της S.