B

ΣΕΜΦΕ 2ο Εξάμηνο - Ιούνιος 2015

Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές

Ον[redacted] .....

ΘΕΜΑΤΑ

$A^T = A^{-1}$

Θ1. i) Να δείξετε ότι οι ιδιοτιμές ενός ορθογώνιου πίνακα έχουν μέτρο 1. **(0.4μ)**

ii) Δίνεται ο γραμμικός μετασχηματισμός $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ τέτοιος ώστε $Te_1 = 2e_1 + e_2 + e_3$, $Te_2 = e_1 + 2e_2 + e_3$, $Te_3 = e_1 + e_2 + 2e_3$, όπου $\{e_1, e_2, e_3\}$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Να δείξετε ότι ο T είναι αυτοσυζυγής. $T = T^*$ **(0.4μ)**

iii) Δίνεται ο υπόχωρος M του $\mathbb{R}^4$, που παράγεται από τα διανύσματα $\mathbf{u_1} = (1, 0, -1, 1)$, $\mathbf{u_2} = (0, 1, 2, 1)$. Να βρείτε το ορθογώνιο συμπλήρωμα $M^\perp$ του M καθώς και τις ορθές προβολές του διανύσματος $\mathbf{v} = (4, 3, 0, 1)$ στους υποχώρους M και $M^\perp$. **(1.2μ)**

iv) Εστω δύο $\nu \times \nu$ πίνακες A και B τέτοιοι ώστε $AB = BA$. Αν ο A έχει ν απλές ιδιοτιμές, να δείξετε ότι υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας M τέτοιος ώστε οι πίνακες $M^{-1}BM$ και $M^{-1}AM$ να είναι διαγώνιοι. **(1.5μ)**

Θ2. i) Τι συμπεραίνετε για έναν πίνακα A αν γνωρίζετε ότι έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(\lambda) = (\lambda + 2)^4(\lambda - 5)^5$ και ελάχιστο πολυώνυμό $m_A(\lambda) = (\lambda + 2)^2(\lambda - 5)^3$; **(0.7μ)**

+διάσταση πίνακα (9×9) → Ο,Τι ΞΕΡΟ

ii) Βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha + 8 & -2\alpha + 6 & 0 \\ \alpha - 3 & 2\alpha - 1 & 0 \\ -2\alpha + 7 & -4\alpha + 10 & 3 \end{bmatrix}$$

είναι διαγωνοποιήσιμος μέσω μετασχηματισμού ομοιότητας και για ποιες όχι. **(1.4μ)**

iii) Για τις τιμές του α για τις οποίες ο πίνακας A του ii) δεν είναι διαγωνοποιήσιμος, κατασκευάστε πλήρως την κανονική μορφή Jordan του A και τον αντίστοιχο πίνακα ομοιότητας. **(1.4μ)**

Θ3. α) Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Να αιτιολογήσετε γιατί ο A διαγωνοποιείται από ορθογώνιο πίνακα και να βρείτε έναν ορθογώνιο πίνακα Q και έναν διαγώνιο πίνακα Δ ώστε να ισχύει: $A = Q\Delta Q^\top$. **(1.8μ)**

β) Δίνεται η εξίσωση $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - 1 = 0$. Να δείξετε ότι η επιφάνεια που περιγράφει η εξίσωση έχει μοναδικό κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων και κατόπιν με κατάλληλη αλλαγή συστήματος συντεταγμένων να αναγνωρίσετε το είδος της επιφάνειας που παριστάνει. **(1.2μ)**

Τα θέματα είναι ισοδύναμα Διάρκεια εξέτασης 2,5 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ