ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ 23/01/2018

Θέμα 1. (α) Έστω X διανυσματικός χώρος και $f : X \to \mathbb{R}$ γραμμική απεικόνιση με $f \neq 0$. (i) Αν $x \in X$ με $f(x) \neq 0$ δείξτε ότι $\ker f \cap < x >= \{0\}$, και ότι ο $\ker f$ είναι υπόχωρος του X συνδιάστασης 1.

(ii) Αν $x \in X$ με $f(x) \neq 0$, δείξτε ότι κάθε $y \in X$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $y = \lambda x + z$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ και $z \in \ker f$.

(β) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, Y κλειστός υπόχωρος του X συνδιάστασης 1.

(i) Δείξτε ότι υπάρχει $f : X \to \mathbb{R}$ γραμμική συνεχής ώστε $Y = \ker f$.

(ii) Δείξτε ότι αν ο X είναι απειροδιάστατος τότε υπάρχει υπόχωρος Z του X, συνδιάστασης 1, που δεν είναι κλειστός.

Θέμα 2. (α) Για κάθε $t \in [0,1]$, ορίζουμε $\delta_t : C[0,1] \to \mathbb{R}$ με $\delta_t(f) = f(t)$.

(i) Δείξτε ότι $\delta_t \in (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)^*$ και ότι $\|\delta_t\| = 1$, για κάθε $t \in [0,1]$.

(ii) Δείξτε ότι αν $t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$ διάφορα ανά δύο, τότε $\|\sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{t_i}\| = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$, για κάθε $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

(iii) Δείξτε ότι ο $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)^*$ δεν είναι διαχωρίσιμος.

(β) Έστω $I_1, \ldots, I_n$ ξένα ανά δύο διαστήματα του $[0,1]$.
Ορίζουμε $T : (C[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ με $T(f) = (\int_{I_i} f(t)dt)_{i=1}^n$.

(i) Δείξτε ότι ο T είναι γραμμικός και φραγμένος τελεστής.

(ii) Υπολογίστε την νόρμα του T.

(iii) Δείξτε ότι ο T είναι επί.

με Cauchy-Schartz "ισότητα" όταν είναι γραμ. εξαρτ.

Θέμα 3. Έστω H χώρος Hilbert.

(α) Αν $x, y \in H$ με $\|y\| = 2\|x\|$ και $< x, y >= -2\|x\|^2$, δείξτε ότι $y = -2x$.

(β) Έστω $A \subset H$ με $A \neq \emptyset$.

(i) Δώστε τον ορισμό του ορθογώνιου συμπληρώματος $A^\perp$ του A.

(ii) Δείξτε ότι το $A^\perp$ είναι ένας κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H.

(γ) Έστω $Y \neq \{0\}$, ένας κλειστός υπόχωρος του H.

(i) Δώστε τον ορισμό της ορθογώνιας προβολής $P_Y : H \to Y$.

(ii) Δείξτε ότι η P_Y είναι ένας γραμμικός φραγμένος τελεστής με $\|P_Y\| = 1$. (Θεωρώντας γνωστό ότι για $x \in H$ ισχύει ότι $P_Y(x) = y \iff x - y \in Y^\perp$).

Θέμα 4. (α) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα.

(i) Δείξτε ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει $x^* \in X^*$ με $\|x^*\| = 1$ τέτοιο ώστε $x^*(x) = \|x\|$.

(ii) Αν $x, y \in X$ τέτοια ώστε $\|x + y\| \geq \|x\|$, δείξτε ότι $\|x + 2y\| \geq \|x + y\|$.

(β) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και A, B μη κενά υποσύνολα του X.

(i) Αν τα A, B είναι κυρτά, δείξτε ότι το $A + B$ είναι κυρτό.

(ii) Αν το B είναι ανοικτό, δείξτε ότι το $A + B$ είναι ανοικτό.

(γ) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και G κυρτό υποσύνολο του X με $0 \in G^\circ$.

(i) Δώστε τον ορισμό του συναρτησιακού Minkowski ρ_G.

(ii) Δείξτε ότι για κάθε $\lambda > 0$ ισχύει ότι $\rho_{\lambda G} = \frac{1}{\lambda}\rho_G$.