ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ - Σχολή ΕΜΦΕ

Εξέταση Στατιστικής Φυσικής (Ιαν. 2017), Αναπλ. Καθ. Γ. Βαρελογιάννης

Μέρος Α:

Α.1:

Τι αναπαριστά το θεώρημα **ισοκατανομής** που συναντάμε στην περιγραφή ενός **κλασσικού ιδανικού αερίου**. Υπάρχει ένα πιο γενικό ανάλογο θεώρημα σε κβαντικά συστήματα ;

Α.2:

α) Υπνθυμίστε τηλεγραφικά τα **αξιώματα** της κβαντομηχανικής.

β) Δείξτε ότι τόσο σε περίπτωση **καθαρής κατάστασης** αλλά και σε περίπτωση **στατιστικού μείγματος καταστάσεων** ισχύει $\langle \widehat{A} \rangle = Tr\{\widehat{\rho}\widehat{A}\}$.

γ) Δείξτε ότι $Tr\{\widehat{\rho}^2\} \leq 1$, πότε ισχύει η ισότητα ;

Α.3:

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση επιμερισμού Z είναι αρκετή για τον υπολογισμό της μέσης τιμής:

α) Οποιασδήποτε διατηρήσιμης ποσότητας $\widehat{X}_i$.

β) Οποιασδήποτε ποσότητας προκύπτει από μια πρώτη παράγωγο ως προς μια παράμετρο ξ μιας διατηρήσιμης ποσότητας $\widehat{X}_i$.

Α.4:

Για ένα κβαντικό αέριο η συνάρτηση επιμερισμού δίνεται από τη σχέση

$$Z_G = \prod_q [1 \pm e^{-\beta(E_q - \mu)}]^{\pm 1}$$

όπου το $(-)$ είναι για **μποζόνια** και $(+)$ είναι για **φερμιόνια**. Δείξτε τεκμηριώνοντας τη διαδικασία και παραθέτοντας τις πράξεις ότι $\langle \widehat{n}_q \rangle \equiv f_q = [e^{\beta(E_q - \mu)} \pm 1]^{-1}$.

Α.5:

α) Σε ένα κλασσικό υπεραγωγό, αν με μαγικό τρόπο θωρακιζόταν πλήρως (μηδενιζόταν) η αλληλεπίδραση *Coulomb* ανάμεσα στους φορείς, θα εξακολουθούσε να υφίσταται η υπεραγώγιμη κατάσταση ;

β) Για την υπεραγώγιμη μετάβαση χωρίς την παρουσία πεδίων, η πυκνότητα ελεύθερης ενέργειας μπορεί να υπακούει ένα ανάπτυγμα της μορφής

$$f_S = f_N + \alpha|\Psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\Psi|^4$$

όπου $\alpha, \beta > 0$. Γιατί το ανάπτυγμα αυτό ; Ποιά ειναι η παράμετρος τάξης και οι συμμετρίες που σπάνε ; Θα υπάρχει συνύπαρξη φάσεων στο σημείο της μετάβασης ;

γ) Σε τι διαφέρουν μια προσέγγιση **μέσου πεδίου** τύπου *Landau* με μια προσέγγιση μέσου πεδίου τύπου *Weiss* και σε τι συμπίπτουν ;

Μέρος Β:

Ενα σύστημα αποτελείται απο δύο ανεξάρτητα σωματίδια, Α και Β . Το καθένα έχει **δύο** δυνατές ενεργειακές καταστάσεις $E_1^{A(B)}$ και $E_2^{A(B)}$ με αντίστοιχες ιδιοκαταστάσεις $|u_1^{A(B)}\rangle$ και $|u_2^{A(B)}\rangle$. Σε καθένα απο τους χώρους *Hilbert*, $\mathcal{E}_A$ και $\mathcal{E}_B$ αντίστοιχα ορίζονται οι καταστάσεις $|\psi_\pm^{A(B)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|u_1^{A(B)}\rangle \pm |u_2^{A(B)}\rangle]$ και θεωρούμε τις καταστάσεις του $\mathcal{E}_A \otimes \mathcal{E}_B$: $|\Phi_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|u_1^A u_1^B\rangle \pm |u_2^A u_2^B\rangle]$, $|\Theta_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|u_1^A u_2^B\rangle \pm |u_2^A u_1^B\rangle]$. Θεωρούμε επίσης **μοναδιαίο** τελεστή $\widehat{G}_{A(B)}$ του οποίου η δράση είναι: $\widehat{G}_{A(B)}|u_1^{A(B)}\rangle = |\psi_+^{A(B)}\rangle$ και $\widehat{G}_{A(B)}|u_2^{A(B)}\rangle = |\psi_-^{A(B)}\rangle$ και βέβαια $\widehat{G}^2_{A(B)} = \widehat{I}$ όπου $\widehat{I}$ ο τελεστής μονάδα.

Β.1: Το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση $|\Phi_+\rangle$. Να βρείτε τον **τελεστή πυκνότητας**, την **εντροπία**, τη μέση τιμή της συνολικής χαμιλτονιανής $\langle\widehat{H}_{AB}\rangle = \langle\widehat{H}_A + \widehat{H}_B\rangle$, τη μεση τιμή της $\langle\widehat{G}_A\rangle$ και τη μέση τιμή της $\langle\widehat{H}_B\rangle$

Β.2: Το σύστημα βρίσκεται τώρα σε επαφή με **δοχείο θερμότητας** θερμοκρασίας T.

α) Δείξτε ότι μπορούν οι καταστάσεις $\{|\Phi_\pm\rangle, |\Theta_\pm\rangle\}$ να αποτελέσουν ορθοκανονική βάση του $\mathcal{E}_A \otimes \mathcal{E}_B$ και να δώσετε στη βάση αυτή τη μορφή πίνακα της ολικής χαμιλτονιανής $\widehat{H}_{AB} = \widehat{H}_A + \widehat{H}_B$ καθώς και τον συνολικό τελεστή πυκνότητας $\widehat{\rho}_{AB}$.

β) Βρείτε τη μέση τιμή της $\langle\widehat{G}_{AB}\rangle$, την εσωτερική ενέργεια του ζεύγους και την Εντροπία του ζεύγους. Αρκεί η συνάρτηση επιμερισμού για τα παραπάνω ;

Β.3: Θεωρούμε N μικροσκοπικές παγίδες οι οποίες έιναι σε επαφή με δοχείο σωματιδίων τύπου A **χημικού δυναμικού** μ_A και δοχείο θερμότητας θερμοκρασίας T οι οποίες μπορεί να παγιδεύσουν μέχρι ένα σωματίδιο τύπου Α. Ολες οι παγίδες έχουν ήδη παγιδεύσει ένα σωματίδιο τύπου Β. Για όσες παγίδες έχουν παγιδεύσει ένα σωματίδιο τύπου Α **και** ένα σωματίδιο τύπου Β ισχύουν τα παραπάνω.

α) Βρείτε τη **συνάρτηση επιμερισμού**, την **εντροπία** και την **εσωτερική ενέργεια** του συστήματος.

β) Βρείτε το μέσο αριθμό των παγίδων οι οποίες περιέχουν ένα ζεύγος σωματιδίων A και B.

Β.4: Οσες παγίδες περιέχουν ένα ζεύγος A και B μπορούν να κινούνται ελεύθερα σε ένα δοχείο μεγάλου όγκου V έχοντας μια μικρή μάζα m συμπεριφερόμενες σαν τα μόρια ενός **κλασσικού σχεδόν ιδανικού αερίου**, χωρίς αυτό να επηρεάζει τους εσωτερικούς βαθμούς ελευθερίας. Να δώσετε τη **συνάρτηση επιμερισμού**, την **εντροπία** την **εσωτερική ενέργεια** και τη **θερμοχωρητικότητα**.

Υπνθυμίζεται ότι για ένα κλασσικό ιδανικό αέριο ισχύει $\mathcal{Z}_\mathcal{N} = (1/\mathcal{N}!)(V/\lambda^3)^\mathcal{N}$ *όπου το θερμικό μήκος κύματος δίνεται από* $\lambda = \sqrt{(2\pi\hbar^2)/(mkT)}$ *και για μεγάλο* $\mathcal{N}$ *ισχύει* $\ln(\mathcal{Z}_\mathcal{N}) \approx \mathcal{N}\ln(\mathcal{Z}_1/\mathcal{N}) + \mathcal{N}$ *όπου* $\mathcal{Z}_1 = V/\lambda^3$.