ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Εξετάσεις στη Μιγαδική Ανάλυση
ΟΜΑΔΑ: Β

29 Ιουνίου, 2017

Θ1. (α′) Αν το G είναι ένας τόπος, δηλαδή ένα ανοικτό και συνεκτικό σύνολο στο $\mathbb{C}$, να βρεθούν όλες οι αναλυτικές συναρτήσεις $f(z) = f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$ στο G τέτοιες ώστε $v(x,y) = u^2(x,y)$, για κάθε $z = x+iy \in G$. (1 μον.)

(β′) Αν η συνάρτηση $h : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ είναι δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, να βρεθούν όλες οι αρμονικές συναρτήσεις της μορφής

$$\varphi(x,y) := h(\sqrt{x^2+y^2})\,, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\,.$$

(1 μον.)

Λύση.

(α′) Επειδή η συνάρτηση f είναι αναλυτική στο G, ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann:

$$\left\{\begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u_x = 2uu_y \\ u_y = -2uu_x \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u_x = 2uu_y \\ u_y = -4u^2u_y \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} u_x = 2uu_y \\ \left(1+4u^2\right)u_y = 0 \end{array}\right\}.$$

Επομένως, $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$ και κατά συνέπεια $f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = 0$ στο τόπο G. Τότε από γνωστή πρόταση η f καθώς επίσης και οι u, v είναι σταθερές στο G. Άρα,

$$f(z) = \lambda + i\lambda^2\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

(β′) Αν $t = \sqrt{x^2+y^2}$, είναι

$$\varphi_x = \frac{x}{t}h'(t)\,,\ \varphi_{xx} = \frac{x^2}{t^2}h''(t) + \frac{y^2}{t^3}h'(t) \quad \text{και} \quad \varphi_y = \frac{y}{t}h'(t)\,,\ \varphi_{yy} = \frac{y^2}{t^2}h''(t) + \frac{x^2}{t^3}h'(t)\,.$$

Επομένως

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = \frac{x^2+y^2}{t^2}h''(t) + \frac{x^2+y^2}{t^3}h'(t) = h''(t) + \frac{1}{t}h'(t) = \frac{1}{t}(th''(t) + h'(t))\,.$$

Επειδή η συνάρτηση φ είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, δηλαδή $\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$, έχουμε

$$0 = th''(t) + h'(t) \Leftrightarrow [th'(t)]' = 0\,, \quad \text{για κάθε } t > 0\,.$$

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι $h(t) = c_1 \ln t + c_2$, $t > 0$, με $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Άρα,

$$\varphi(x,y) = c_1 \ln\sqrt{x^2+y^2} + c_2\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

■

Θ2. (α′) Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση, δηλαδή αναλυτική στο $\mathbb{C}$. Αν

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n\,, \quad z \in \mathbb{C}\,,$$

είναι το ανάπτυγμα Taylor της f, από το θεώρημα Cauchy-Taylor για κάθε $r > 0$ οι συντελεστές της δυναμοσειράς δίνονται από τον τύπο

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz\,.$$

Δείξτε ότι αν η f είναι φραγμένη στο $\mathbb{C}$, δηλαδή αν υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|f(z)| \leq M$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$, τότε η συνάρτηση f είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$. (1 μον.)

(β′) Δείξτε ότι δεν υπάρχει ακέραια συνάρτηση $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$|g(z)| > \frac{1}{2}|z|\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}\,. \tag{$*$}$$

(1 μον.)

Λύση.

(α′) Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ είναι

$$\begin{aligned}
|c_n| = \left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| &= \left|\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \oint_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{|z|^{n+1}}\, |dz| \\
&\leq \frac{M}{2\pi} \oint_{|z|=r} \frac{1}{r^{n+1}}\, |dz| && (|f(z)| \leq M) \\
&= \frac{M}{2\pi r^{n+1}} \oint_{|z|=r} |dz| = \frac{M}{2\pi r^{n+1}} 2\pi r = M \cdot \frac{1}{r^n} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0\,.
\end{aligned}$$

Επομένως $c_n = 0$, για κάθε $n \geq 1$. Άρα $f(z) = c_0$, δηλαδή η f είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$.

(β′) Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακέραια συνάρτηση $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε η $(*)$ ισχύει. Τότε η συνάρτηση g δεν μηδενίζεται, δηλαδή δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{C}$. Πράγματι, αν $g(z_0) = 0$ για κάποιο $z_0 \in \mathbb{C}$, τότε

$$|g(z_0)| = 0 \leq \frac{1}{2}|z_0|\,. \qquad \text{(άτοπο λόγω της } (*))$$

Επομένως η συνάρτηση $h(z) := \frac{z}{g(z)}$ είναι ακέραια και από την $(*)$ έχουμε

$$|h(z)| = \frac{|z|}{|g(z)|} < 2\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}\,.$$

Δηλαδή η ακέραια συνάρτηση h είναι φραγμένη στο $\mathbb{C}$ και από το (α′), δηλαδή από το θεώρημα Liouville, η h είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$. Έστω $h(z) = \frac{z}{g(z)} = c$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Όμως $h(0) = 0$ και αυτό συνεπάγεται ότι $c = 0$. Επομένως

$$\frac{z}{g(z)} = 0\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}\,. \qquad \text{(άτοπο)}$$

Άρα, δεν υπάρχει ακέραια συνάρτηση $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ που να ικανοποιεί την $(*)$.

■

Θ3. (α′) Έστω

$$f(z) = \frac{i}{z(z-i)(z^2+1)}\,.$$

Να βρεθούν όλοι οι δυνατοί δακτύλιοι με κέντρο το $z_0 = i$ στους οποίους η f αναπτύσσεται σε σειρά Laurent και να βρεθεί το ανάπτυγμα Laurent της f στο μεγαλύτερο δυνατό δακτύλιο που περιέχει το σημείο $1 + 2i$. (1,5 μον.)

(β′) Έστω $\dfrac{z^2}{\sin(\pi z)} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης $g(z) = \frac{z^2}{\sin(\pi z)}$ στο δακτύλιο

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\} \text{ με κέντρο το } z_0 = 0\,.$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Laurent καθώς επίσης και το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων να υπολογιστούν ο συντελεστής a_n, για κάθε $n \leq 1$. (1,5 μον.)

Λύση.

(α′) Είναι

$$f(z) = \frac{i}{z(z-i)(z^2+1)} = \frac{(z+i)-z}{z(z+i)(z-i)^2} = \frac{1}{z(z-i)^2} - \frac{1}{(z+i)(z-i)^2}\,.$$

Τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της f είναι: 0 και $\pm i$. Επομένως, το ανάπτυγμα Laurent της f με κέντρο το i μπορεί να γίνει στους δακτυλίους

$$\Delta_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-i| < 1\}\ ,\ \Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z-i| < 2\} \text{ και } \Delta_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z-i| > 2\}\ .$$

Επειδή $|(1+2i)-i| = |1+i|$ και $1 < |1+i| = \sqrt{2} < 2$, το $1+2i \in \Delta_2$. Θα αναπτύξουμε την f στο δακτύλιο Δ_2 που είναι ο μεγαλύτερος δακτύλιος που περιέχει το σημείο $1+2i$. Επειδή ως γνωστόν

$$\frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n\,, \quad |w| < 1\,, \qquad \text{(γεωμετρική σειρά)}$$

έχουμε

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z(z-i)^2} - \frac{1}{(z+i)(z-i)^2} \\
&= \frac{1}{(z-i)^2[(z-i)+i]} - \frac{1}{(z-i)^2[(z-i)+2i]} \\
&= \frac{1}{(z-i)^3} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{i}{z-i}\right)} - \frac{1}{2i(z-i)^2} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{z-i}{2i}\right)} \\
&= \frac{1}{(z-i)^3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{i}{z-i}\right)^n - \frac{1}{2i(z-i)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-i}{2i}\right)^n \\
&\qquad\qquad \left(\left|\tfrac{i}{z-i}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-i| > 1 \text{ και } \left|\tfrac{z-i}{2i}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-i| < 2\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \frac{1}{(z-i)^{n+3}} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^{n+1} (z-i)^{n-2}\,.
\end{aligned}$$

Το παραπάνω ανάπτυγμα ισχύει στο δακτύλιο $\Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z-i| < 2\}$ που είναι ο μεγαλύτερος δυνατός δακτύλιος που περιέχει το σημείο $1+2i$.

(β′) Είναι $\sin(\pi z) = 0 \Leftrightarrow \pi z = k\pi \Leftrightarrow z = k$, $k \in \mathbb{Z}$. Τα $z_k = k$, $k \in \mathbb{Z}$, είναι μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της g. Από το θεώρημα Laurent οι συντελεστές a_n δίνονται από τον τύπο

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{z^2/\sin(\pi z)}{z^{n+1}}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{z^{-n+1}}{\sin(\pi z)}\, dz\,,$$

όπου ο κύκλος $|z| = r$ με κέντρο 0, ακτίνα r, $1 < r < 2$ και θετική φορά διαγραφής ανήκει στο δακτύλιο Δ. Τα σημεία 0 και ± 1 βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου $|z| = r$.

(i) $\underline{n=1}$: Σ' αυτή την περίπτωση έχουμε

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{1}{\sin(\pi z)}\,dz\,.$$

Τα σημεία 0 και ± 1 είναι απλοί πόλοι της $h(z) = \frac{1}{\sin(\pi z)}$. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned}
a_0 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{1}{\sin(\pi z)}\,dz &= \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\sin(\pi z)},\,-1\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\sin(\pi z)},\,0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\sin(\pi z)},\,1\right)\\
&= \left.\frac{1}{(\sin(\pi z))'}\right|_{z=-1} + \left.\frac{1}{(\sin(\pi z))'}\right|_{z=0} + \left.\frac{1}{(\sin(\pi z))'}\right|_{z=1}\\
&= \frac{1}{\pi\cos(-\pi)} + \frac{1}{\pi\cos 0} + \frac{1}{\pi\cos\pi}\\
&= -\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} = -\frac{1}{\pi}\,.
\end{aligned}$$

(ii) $\underline{n \le 0}$: Σ' αυτή την περίπτωση είναι

$$h(z) = \frac{z^{-n+1}}{\sin(\pi z)}\,, \quad \text{με } -n \ge 0 \Leftrightarrow -n+1 \ge 1\,.$$

Τα σημεία ± 1 είναι απλοί πόλοι της h ενώ το 0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της h. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned}
a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{z^{-n+1}}{\sin(\pi z)}\,dz &= \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-n+1}}{\sin(\pi z)},\,-1\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-n+1}}{\sin(\pi z)},\,1\right)\\
&= \left.\frac{z^{-n+1}}{(\sin(\pi z))'}\right|_{z=-1} + \left.\frac{z^{-n+1}}{(\sin(\pi z))'}\right|_{z=1}\\
&= \frac{(-1)^{-n+1}}{\pi\cos(-\pi)} + \frac{1}{\pi\cos\pi}\\
&= (-1)^{-n}\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi}\\
&= \begin{cases} -\frac{2}{\pi} & \text{αν } -n \text{ περιττός}\\ 0 & \text{αν } -n \text{ άρτιος}\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

■

Θ4. Αν $n \in \mathbb{N}^*$, να λυθεί η εξίσωση $2z^n - i = 0$ και στη συνέχεια να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{z^{n-1}}{2z^n - i}\,dz\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση. Επειδή

$$2z^n - i = 0 \Leftrightarrow 2z^n = i = e^{i\pi/2} \Leftrightarrow z^n = \frac{1}{2}e^{i\pi/2}\,,$$

οι ρίζες της εξίσωσης $2z^n - i = 0$ δίνονται από τον τύπο

$$z_k = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}e^{i\frac{2k\pi+\pi/2}{n}}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

Επειδή οι z_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, είναι απλές ρίζες της εξίσωσης $2z^n - i = 0$ με $|z_k| = 1/\sqrt[n]{2} < 1$, τα z_k είναι απλοί πόλοι της συνάρτησης $f(z) = z^{n-1}/(2z^n - i)$ στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου $|z| = 1$. Επομένως από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων

$$\begin{aligned} I &= \operatorname{Res}\left(\frac{z^{n-1}}{2z^n - i},\, z_0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z^{n-1}}{2z^n - i},\, z_1\right) + \cdots + \operatorname{Res}\left(\frac{z^{n-1}}{2z^n - i},\, z_{n-1}\right) \\ &= \left.\frac{z^{n-1}}{(2z^n - i)'}\right|_{z=z_0} + \left.\frac{z^{n-1}}{(2z^n - i)'}\right|_{z=z_1} + \cdots + \left.\frac{z^{n-1}}{(2z^n - i)'}\right|_{z=z_{n-1}} \\ &= \frac{z_0^{n-1}}{2nz_0^{n-1}} + \frac{z_1^{n-1}}{2nz_1^{n-1}} + \cdots + \frac{z_{n-1}^{n-1}}{2nz_{n-1}^{n-1}} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

■

Θ5. Έστω P, Q δύο πολυώνυμα. Αν γ_R είναι το ημικύκλιο του άνω ημιεπιπέδου με παραμετρική εξίσωση $z(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$, διατυπώστε το λήμμα Jordan για το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z}\, dz\,, \quad \lambda > 0\,.$$

Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν τα πολυώνυμα;

Χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση και το λήμμα Jordan, δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\pi x)}{x^2 + 2x + 2}\, dx = \Re\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\pi x}}{x^2 + 2x + 2}\, dx\right) = -\pi e^{-\pi}\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση. *Λήμμα Jordan*: Αν βαθμός $Q(z) \ge$ βαθμός $P(z) + 1$ και $\lambda > 0$, τότε

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z}\, dz = 0\,.$$

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{1}{z^2 + 2z + 2}\,.$$

Τα $-1 \pm i$ είναι μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της f και το $-1 + i$ βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο. Ολοκληρώνουμε τη συνάρτηση f πάνω στην κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη $\gamma = [-R, R] \cup \gamma_R$, με θετική φορά, όπου γ_R είναι το ημικύκλιο στο άνω ημιεπίπεδο με παραμετρική εξίσωση $z(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$ και $R > |-1 + i| = \sqrt{2}$. Η συνάρτηση f είναι αναλυτική πάνω και στο εσωτερικό της γ εκτός από το σημείο $z = -1 + i$ που είναι απλός πόλος της f. Επειδή

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\big(f(z)e^{i\pi z}, -1 + i\big) &= \lim_{z\to-1+i} (z - (-1 + i)) \frac{1}{(z - (-1 + i))(z + 1 + i)} e^{i\pi z} \\ &= \frac{e^{i\pi(-1+i)}}{2i} = e^{-i\pi}\frac{e^{-\pi}}{2i} = -\frac{e^{-\pi}}{2i}\,, \end{aligned}$$

από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων

$$\int_{-R}^{R} f(x)e^{i\pi x}\, dx + \int_{\gamma_R} f(z)e^{i\pi z}\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}\big(f(z)e^{i\pi z}, -1 + i\big) = -\pi e^{-\pi}\,. \qquad (**)$$

Επειδή βαθμός $(z^2 + 2z + 2) = 2 > 1 =$ βαθμός $(1) + 1$ και $\pi > 0$, από το λήμμα Jordan

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)e^{i\pi z}\, dz = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{1}{z^2 + 2z + 2} e^{i\pi z}\, dz = 0\,.$$

Παίρνοντας στη $(**)$ το $R \to \infty$, έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\pi x)}{x^2+2x+2}\, dx = \Re\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\pi x}}{x^2+2x+2}\, dx\right) = -\pi e^{-\pi}\,.$$

■

<u>*Σημείωση*</u>: Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$ και έστω f αναλυτική συνάρτηση στο διάτρητο δίσκο $D'(z_0, R) : 0 < |z - z_0| < R$.

- Αν το z_0 είναι πόλος τάξης $k \in \mathbb{N}^*$ της f, τότε

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0)^k f(z)\right]^{(k-1)}\,.$$

- Αν $f = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}$, όπου φ_1, φ_2 αναλυτικές συναρτήσεις στο z_0 με $\varphi_1(z_0) \neq 0$, $\varphi_2(z_0) = 0$ και $\varphi_2'(z_0) \neq 0$, τότε το z_0 είναι απλός πόλος της f με

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{\varphi_1(z_0)}{\varphi_2'(z_0)}\,.$$

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες