ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Εξετάσεις στη Μιγαδική Ανάλυση
ΟΜΑΔΑ: Β

24 Ιουνίου, 2016

Θ1. Να βρεθούν όλα τα σημεία του $\mathbb{C}$ στα οποία η $f(z) = \sin \overline{z}$ είναι παραγωγίσιμη και να υπολογιστεί η παράγωγος. Σε ποια σημεία του $\mathbb{C}$ είναι η f αναλυτική; (1 μον.)

Λύση. Είναι $f(z) = f(x+iy) = \sin(x-iy)$. Επειδή $f_x = \cos(x-iy)$ και $f_y = -i\cos(x-iy)$, οι μερικές παράγωγοι f_x, f_y είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}^2$. Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{C}$, θα πρέπει να ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann. Έχουμε

$$f_x = -if_y \Leftrightarrow \cos(x-iy) = -\cos(x-iy) \Leftrightarrow \cos(x-iy) = 0 \Leftrightarrow x - iy = k\pi + \frac{\pi}{2}\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Επομένως, η $f(z) = \sin \overline{z}$ είναι παραγωγίσιμη στα σημεία $z_k = k\pi + \pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$, του πραγματικού άξονα με παράγωγο

$$f'(z_k) = f_x|_{z_k = k\pi+\pi/2} = \cos\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0\,.$$

Επειδή η f δεν είναι παραγωγίσιμη σε καμία περιοχή των σημείων $z_k = k\pi + \pi/2$, η f δεν είναι αναλυτική σε κανένα σημείο του $\mathbb{C}$. ■

Θ2. (α′) Διατυπώστε την *αρχή ελαχίστου* για ένα φραγμένο τόπο $G \subset \mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι αναλυτική στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ και συνεχής στον κύκλο $|z| = 1$ που είναι το σύνορο του $D(0,1)$. Αν $f(0) = -i$ και $|f(z)| > 1$, για κάθε $|z| = 1$, δείξτε ότι η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $D(0,1)$. (1,3 μον.)

(β′) Έστω $z_0 \in D(0,1)$. Είναι γνωστό ότι η συνάρτηση $\varphi_{z_0} : D(0,1) \to D(0,1)$ με

$$\varphi_{z_0}(z) := \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}$$

είναι αναλυτική, $1-1$ και απεικονίζει το μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$ στον εαυτό του. Δηλαδή η συνάρτηση φ_{z_0} είναι $1-1$ και επί. Η

$$\varphi_{-z_0}(z) = \frac{z + z_0}{1 + \overline{z_0}z}$$

είναι η αντίστροφη συνάρτηση της φ_{z_0}.
Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι αναλυτική στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$ με $f(z_0) = 0$ και $|f(z)| \leq 1$, για κάθε $|z| < 1$. Χρησιμοποιώντας το λήμμα του Schwarz για τη συνάρτηση $g(z) := f(\varphi_{-z_0}(z))$ στην ειδική περίπτωση του μοναδιαίου δίσκου $D(0,1)$, δείξτε ότι

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{1 - |z_0|^2}\,.$$

(1,2 μον.)

Λύση.

(α′) *Αρχή ελαχίστου*: Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f δε μηδενίζεται στο G. Αν η f είναι συνεχής στο $\overline{G}$, αναλυτική στο G και μη σταθερή, τότε η $|f|$ παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο σύνορο ∂G του G και μόνο εκεί.
Υποθέτουμε ότι η f δεν έχει καμία ρίζα στο $D(0,1)$, δηλαδή δε μηδενίζεται στο μοναδιαίο δίσκο. Τότε, από την αρχή ελαχίστου η $|f|$ θα παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο σύνορο του $D(0,1)$ που είναι ο μοναδιαίος κύκλος $|z| = 1$. Όμως από την υπόθεση είναι $|f(z)| > 1$, για κάθε $|z| = 1$, ενώ $|f(0)| = |-i| = 1$. Άτοπο. Καταλήξαμε σε άτοπο επειδή υποθέσαμε ότι η συνάρτηση f δε μηδενίζεται στο μοναδιαίο δίσκο. Αρα, η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $D(0,1)$.

(β′) Η συνάρτηση g είναι αναλυτική στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$. Επειδή $|f(z)| \leq 1$ για κάθε $|z| < 1$, είναι $|g(z)| \leq 1$ για κάθε $|z| < 1$ με $g(0) = f(\varphi_{-z_0}(0)) = f(z_0) = 0$, από το λήμμα του Schwarz έπεται ότι $|g(z)| \leq |z|$, για κάθε $|z| < 1$ και $|g'(0)| \leq 1$. Όμως

$$g'(z) = f'(\varphi_{-z_0}(z))(\varphi_{-z_0})'(z) = f'(\varphi_{-z_0}(z))\frac{1-|z_0|^2}{(1+\overline{z_0}z)^2}$$

και επομένως

$$|g'(0)| = |f'(z_0)|(1-|z_0|^2) \leq 1 \Leftrightarrow |f'(z_0)| \leq \frac{1}{1-|z_0|^2}\,.$$

■

Θ3. Έστω f αναλυτική στον τόπο $G \subseteq \mathbb{C}$. Αν η f έχει ρίζα στο G που δεν είναι μεμονωμένο σημείο του Z_f(Z_f είναι το σύνολο των ριζών της f στο G), από το θεώρημα ταυτοτισμού είναι γνωστό ότι η f είναι ταυτοτικά μηδέν στο G.

Υποθέτουμε ότι ο τόπος G περιέχει τον κλειστό μοναδιαίο δίσκο $\overline{D(0,1)} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

(α′) Αν $f(1/n) = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, δείξτε ότι $f \equiv 0$ στο G. (1 μον.)

(β′) Έστω g αναλυτική συνάρτηση στον τόπο G και έστω $k \in \mathbb{N}$. Αν

$$\oint_{|z|=1} \frac{g(z)}{(nz-1)^{k+1}}\,dz = 0\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}\,,$$

δείξτε ότι η g είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ $k-1$ στο G. (1 μον.)

Λύση.

(α′) Επειδή $1/n \in G$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και $f(1/n) = 0$, η $(1/n)$ είναι ακολουθία ριζών της f στο G. Επειδή $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \in G$ και η f είναι συνεχής στο G, από το θεώρημα μεταφοράς έχουμε $0 = \lim_{n\to\infty} f(1/n) = f(0)$, δηλαδή το 0 είναι ρίζα της f στο G. Επειδή $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \in G$, το 0 είναι ρίζα της f στο G που δεν είναι μεμονωμένο σημείο του Z_f. Επομένως, από το θεώρημα ταυτοτισμού έπεται ότι $f \equiv 0$ στο G.

(β′) Από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους έχουμε

$$\begin{aligned} g^{(k)}\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{k!}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{g(z)}{(z-1/n)^{k+1}}\,dz \\ &= n^{k+1}\frac{k!}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{g(z)}{(nz-1)^{k+1}}\,dz = 0\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}\,. \end{aligned}$$

Επειδή $g^{(k)}(1/n) = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, από το (α′) έπεται ότι $g^{(k)} \equiv 0$ στο G. Επομένως, η g είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ $k-1$ στο G.

■

Θ4. (α′) Να βρεθεί η σειρά(ανάπτυγμα) Laurent της

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)(z^2+1)}$$

με κέντρο το $z_0 = -i$ στο μεγαλύτερο δυνατό δακτύλιο που περιέχει το σημείο $1-2i$. (1 μον.)

(β′) Έστω $\dfrac{z(z^2-1)}{\sin^2(\pi z)} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης $g(z) = \frac{z(z^2-1)}{\sin^2(\pi z)}$ στο δακτύλιο

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\} \text{ με κέντρο το } z_0 = 0\,.$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Laurent καθώς επίσης και το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων να υπολογιστούν οι συντελεστές a_n, για κάθε $n \le -1$. (1,5 μον.)

Λύση.

(α′) είναι

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)(z^2+1)} = \frac{1}{(z+i)^2(z-i)}\,.$$

Τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της f είναι: $-i$ και i. Επομένως, το ανάπτυγμα Laurent της f με κέντρο το $-i$ μπορεί να γίνει στους δακτυλίους $\Delta_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z+i| < 2\}$ και $\Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z+i| > 2\}$. Επειδή $|(1-2i)+i| = |1-i| = \sqrt{2} < 2$, το $1-2i \in \Delta_1$. Θα αναπτύξουμε την f στο δακτύλιο Δ_1 που είναι ο μεγαλύτερος δακτύλιος που περιέχει το σημείο $1-2i$. Επειδή ως γνωστόν

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n\,, \quad |w| < 1\,, \qquad \text{(γεωμετρική σειρά)}$$

έχουμε

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{(z+i)^2(z-i)} \\
&= \frac{1}{(z+i)^2[(z+i)-2i]} \\
&= -\frac{1}{2i(z+i)^2} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{z+i}{2i}\right)} \\
&= -\frac{1}{2i(z+i)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+i}{2i}\right)^n \qquad \left(\left|\tfrac{z+i}{2i}\right| < 1 \Leftrightarrow |z+i| < 2\right) \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2i)^{n+1}}(z+i)^{n-2} = -\sum_{n=-2}^{\infty} \frac{1}{(2i)^{n+3}}(z+i)^n\,.
\end{aligned}$$

Το παραπάνω ανάπτυγμα ισχύει στο διάτρητο δίσκο $\Delta_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z+i| < 2\}$ που είναι ο μεγαλύτερος δυνατός δακτύλιος που περιέχει το σημείο $1-2i$.

(β′) Είναι $\sin(\pi z) = 0 \Leftrightarrow \pi z = k\pi \Leftrightarrow z = k$, $k \in \mathbb{Z}$. Τα $z_k = k$, $k \in \mathbb{Z}$, είναι μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της g. Από το θεώρημα Laurent οι συντελεστές a_n δίνονται από τον τύπο

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{z(z^2-1)/\sin^2(\pi z)}{z^{n+1}}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{z^{-n}(z^2-1)}{\sin^2(\pi z)}\, dz\,,$$

όπου ο κύκλος $|z| = r$ με κέντρο 0, ακτίνα r, $1 < r < 2$ και θετική φορά διαγραφής ανήκει στο δακτύλιο Δ. Τα σημεία 0 και ± 1 βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου $|z| = r$.

(i) <u>$n = -1$:</u> Σ' αυτή την περίπτωση έχουμε

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{z(z^2-1)}{\sin^2(\pi z)}\, dz\,.$$

Τα σημεία 0 και ± 1 είναι απλοί πόλοι της $h(z) = \frac{z(z^2-1)}{\sin^2(\pi z)}$. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned}
a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{z(z^2-1)}{\sin^2(\pi z)}\,dz &= \operatorname{Res}\left(\frac{z(z^2-1)}{\sin^2(\pi z)}, -1\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z(z^2-1)}{\sin^2(\pi z)}, 0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z(z^2-1)}{\sin^2(\pi z)}, 1\right) \\
&= \lim_{z\to -1} z(z-1)\left(\frac{z+1}{\sin(\pi z)}\right)^2 + \lim_{z\to 0}(z^2-1)\left(\frac{z}{\sin(\pi z)}\right)^2 \\
&\quad + \lim_{z\to 1} z(z+1)\left(\frac{z-1}{\sin(\pi z)}\right)^2 \\
&= 2\lim_{z\to -1}\left(\frac{1}{\pi\cos(\pi z)}\right)^2 - \lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{\pi\cos(\pi z)}\right)^2 + 2\lim_{z\to 1}\left(\frac{1}{\pi\cos(\pi z)}\right)^2 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(κανόνας L'Hôpital)} \\
&= 2\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi^2} + 2\frac{1}{\pi^2} = \frac{3}{\pi^2}\,.
\end{aligned}$$

(ii) $\underline{n \le -2}$: Σ' αυτή την περίπτωση είναι

$$h(z) = \frac{z^{-n}(z^2-1)}{\sin^2(\pi z)}\,, \quad \text{με } -n \ge 2\,.$$

Τα σημεία ± 1 είναι απλοί πόλοι της g ενώ το 0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της g. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned}
a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{z^{-n}(z^2-1)}{\sin^2(\pi z)}\,dz &= \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-n}(z^2-1)}{\sin^2(\pi z)}, -1\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-n}(z^2-1)}{\sin^2(\pi z)}, 1\right) \\
&= \lim_{z\to -1} z^{-n}(z-1)\left(\frac{z+1}{\sin(\pi z)}\right)^2 + \lim_{z\to 1} z^{-n}(z+1)\left(\frac{z-1}{\sin(\pi z)}\right)^2 \\
&= -2(-1)^{-n}\lim_{z\to -1}\left(\frac{1}{\pi\cos(\pi z)}\right)^2 + 2\lim_{z\to 1}\left(\frac{1}{\pi\cos(\pi z)}\right)^2 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(κανόνας L'Hôpital)} \\
&= 2(-1)^{-n+1}\frac{1}{\pi^2} + 2\frac{1}{\pi^2} \\
&= \begin{cases} \frac{4}{\pi^2} & \text{αν } -n \text{ περιττός} \\ 0 & \text{αν } -n \text{ άρτιος}\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

■

Θ5. Έστω τα πολυώνυμα $P(z) = z^2$ και $Q(z) = z^4 + 4$.

(α') (i) Δείξτε ότι για R_0 αρκετά μεγάλο, $R_0 > \sqrt{2}$, υπάρχει σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \le \frac{M}{|z|^2}\,, \quad \text{για κάθε } |z| \ge R_0\,.$$

(ii) Αν γ_R είναι το ημικύκλιο του άνω ημιεπιπέδου με εξίσωση $\gamma(t) = Re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$, δείξτε ότι

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = 0\,. \tag{1}$$

(1 μον.)

(β′) Χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση, δείξτε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+4}\,dx = \frac{\pi}{4}\,.$$

(1 μον.)

Λύση.

(α′) (i) Από γνωστή πολυωνυμική ανισότητα υπάρχει $R_0 \geq 1$ τέτοια ώστε

$$\frac{1}{2}|z|^4 \leq |Q(z)| \leq \frac{3}{2}|z|^4\,, \quad \text{για κάθε } |z| \geq R_0$$

Επειδή $Q(z) = 0 \Leftrightarrow z^4 = -4 = 4e^{\pi i}$, οι ρίζες του πολυωνύμου Q είναι

$$z_k = \sqrt[4]{4}e^{(2k\pi+\pi)i/4} = \sqrt{2}e^{(2k\pi+\pi)i/4}\,, \quad k = 0,1,2,3\,.$$

Δηλαδή $z_k = \pm 1 \pm i$. Παίρνουμε το $R_0 > \sqrt{2}$ έτσι ώστε ο κύκλος $|z| = R_0$ να περιέχει τις ρίζες $\pm 1 \pm i$ του πολυωνύμου Q. Τότε, για κάθε $|z| \geq R_0$ είναι

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \leq \frac{|z|^2}{\frac{1}{2}|z|^4} = \frac{2}{|z|^2}\,.$$

(ii) Είναι

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz\right| &\leq \int_{\gamma_R} \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| |dz| \\
&\leq \int_{\gamma_R} \frac{2}{R^2}\,|dz| && \text{(από το } (i) \text{ για } |z| = R \geq R_0) \\
&= \frac{2}{R^2}\pi R = \frac{2\pi}{R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0
\end{aligned}$$

και άρα

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = 0\,.$$

(β′) Η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{z^2}{z^4+4}$$

έχει μεμονωμένα ανώμαλα σημεία τα $\pm 1 \pm i$ και τα $\pm 1 + i$ βρίσκονται στο άνω ημιεπίπεδο. Ολοκληρώνουμε τη συνάρτηση f πάνω στην κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη $\gamma = [-R, R] \cup \gamma_R$, με θετική φορά, όπου γ_R είναι το ημικύκλιο στο άνω ημιεπίπεδο με εξίσωση $z(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$ και $R > \sqrt{2}$. Η συνάρτηση f είναι αναλυτική πάνω και στο εσωτερικό της γ εκτός από το $\pm 1 + i$ που είναι απλοί πόλοι της f. Επειδή

$$\operatorname{Res}(f, \pm 1 + i) = \left.\frac{z^2}{(z^4+4)'}\right|_{z=\pm 1+i} = \frac{1}{4(\pm 1 + i)}\,,$$

από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων

$$\begin{aligned}
\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz &= 2\pi i\,[\operatorname{Res}(f, 1+i) + \operatorname{Res}(f, -1+i)] \\
&= 2\pi i\left[\frac{1}{4(1+i)} + \frac{1}{4(-1+i)}\right] = \frac{\pi}{2}\,. \qquad (*)
\end{aligned}$$

Επειδή από την (1)

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = 0\,,$$

παίρνοντας στην $(*)$ το $R\to\infty$ έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+4}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

και άρα

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+4}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+4}\,dx = \frac{\pi}{4}\,.$$

■

<u>*Σημείωση*</u> : Αν το $z_0\in\mathbb{C}$ είναι πόλος τάξης $k\in\mathbb{N}$ της συνάρτησης f, το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο z_0 δίνεται από τον τύπο

$$\operatorname{Res}(f,z_0) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)^k f(z)\right]^{(k-1)}\,.$$

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες