ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ
25/1/2019

Στα επόμενα, για $k \in \mathbb{N}$, συμβολίζουμε με d_k την Ευκλείδεια μετρική στον $\mathbb{R}^k$.

ΘΕΜΑ 1. Ο (X, d) είναι ένας μετρικός χώρος. Ορίζουμε $\rho(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{2 + d(x, y)}$ για κάθε x και y στον X.

(i). Δείξτε ότι ο (X, ρ) είναι ένας μετρικός χώρος.

(ii). Δείξτε ότι οι μετρικές d και ρ είναι ισοδύναμες.

(iii). Δείξτε ότι αν ο μετρικός χώρος (X, d) είναι πλήρης, τότε και ο μετρικός χώρος (X, ρ) είναι πλήρης.

ΘΕΜΑ 2.

(i). Οι (X, d), (Y, ρ) και (Z, τ) είναι μετρικοί χώροι. Θεωρούμε τις απεικονίσεις $f\colon (X, d) \to (Y, \rho)$ και $g\colon (Y, \rho) \to (Z, \tau)$. Υποθέτουμε ότι οι f και g είναι συνεχείς. Δείξτε ότι η σύνθετη συνάρτηση $g \circ f\colon (X, d) \to (Z, \tau)$ είναι συνεχής.

(ii). Ο (X, d) είναι ένας μετρικός χώρος και η απεικόνιση $h\colon (X, d) \to (\mathbb{R}, d_1)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Έστω $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ μία d-Cauchy ακολουθία στοιχείων του X. Να δείξετε ότι η ακολουθία των πραγματικών αριθμών $\big(h(x_n)\big)_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

ΘΕΜΑ 3.

(i). Ο (X, d) είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος και η $(H_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μία ακολουθία μη κενών, κλειστών υποσυνόλων του (X, d) τέτοια ώστε $H_{n+1} \subset H_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(H_n) = 0$. Δείξτε ότι το $\cap_{n=1}^{\infty} H_n$ είναι μονοσύνολο.

(ii). Διατυπώστε το θεώρημα Baire και κάνοντας χρήση αυτού, αποδείξτε ότι το σύνολο των αρρήτων είναι υπεραριθμήσιμο.

ΘΕΜΑ 4.

(i). Αν $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^3 + y^3 \leq 2x\}$, δείξτε ότι το K είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του μετρικού χώρου $(\mathbb{R}^2, d_2)$. κλειστό και φραγμένο

(ii). Ο (X, d) είναι ένας μετρικός χώρος. Έστω A μη κενό, συμπαγές υποσύνολο του (X, d). Έστω F μη κενό, κλειστό υποσύνολο του (X, d). Υποθέτουμε ότι $A \cap F = \emptyset$. Δείξτε ότι υπάρχει ένας θετικός πραγματικός αριθμός λ τέτοιος ώστε $d(a, b) \geq \lambda$ για κάθε $a \in A$ και κάθε $b \in F$.