$\boxed{\text{A}}$

Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. 2ο Εξάμηνο - 08 Ιουνίου 2017

Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές

Ονοματεπώνυμο .....

ΘΕΜΑΤΑ

Θ1. i) Έστω V ορθομοναδιαίος χώρος και $T : V \to V$ αυτοσυζυγής γραμμικός μετασχηματισμός. (α) Δείξτε ότι κάθε ιδιοτιμή του T είναι πραγματικός αριθμός. (β) Δείξτε ότι τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές του T είναι ορθογώνια μεταξύ τους. (1μ)

ii) Θεωρούμε το συμμετρικό πίνακα $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Να βρεθεί ορθογώνιος πίνακας P έτσι ώστε ο $P^\top AP$ να είναι διαγώνιος. (1,5μ)

Θ2. i) Δινεται η τετραγωνική μορφή $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $q(\mathbf{x}) = -4x_1^2 - 4x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$. (α) Να βρείτε τον συμμετρικό πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$ ώστε $q(\mathbf{x}) = X^\top AX$ και βρείτε τις ιδιοτιμές του. (β) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $q_n : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με $q_n(\mathbf{x}) = X^\top A^n X$. Βρείτε τις ιδιοτιμές του A^n και εξετάσετε για τις διάφορες τιμές του $n \in \mathbb{N}$ πότε η q_n είναι θετικά και πότε αρνητικά ορισμένη. (1μ)

ii) Έστω V ορθομοναδιαίος χώρος, F γραμμικός υπόχωρος του V διάστασης n και $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ μια ορθοκανονική βάση του F. Ορίζουμε $P : V \to F$ με $P\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} < \mathbf{x}, \mathbf{e}_i > \mathbf{e}_i$, για κάθε $\mathbf{x} \in V$. Δείξτε τα επόμενα. (α) Η P είναι γραμμική. (β) Για κάθε $\mathbf{y} \in F$, $P\mathbf{y} = \mathbf{y}$. (γ) Για κάθε $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} - P\mathbf{x} \in F^\perp$. (δ) Για κάθε $\mathbf{x} \in V$ και $\mathbf{y} \in F$, $\|\mathbf{x} - P\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y} - P\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$. (*Υπόδειξη: Παρατηρείστε ότι* $\mathbf{y} - P\mathbf{x} \in F$ *και λάβετε υπόψη το (γ)*). (ε) Για κάθε $\mathbf{x} \in V$ και $\mathbf{y} \in F$, $\|\mathbf{x} - P\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ και $\|P\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\|$. (1,5μ)

Θ3. i) Τι καταλαβαίνουμε ότι ισχύει για έναν πίνακα A αν γνωρίζουμε ότι έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(\lambda) = (\lambda + 2)^4(\lambda - 1)^3$ και ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(\lambda) = (\lambda + 2)^2(\lambda - 1)^2$; (0,6μ)

ii) Έστω δύο όμοιοι μεταξύ τους $\nu \times \nu$ πίνακες A, B. Να αποδειχθεί ότι έχουν τις ίδιες ακριβώς ιδιοτιμές με τις ίδιες αλγεβρικές και γεωμετρικές πολλαπλότητες. (1,4μ)

Θ4. Έστω ο πίνακας $A(\alpha) = \begin{bmatrix} 2\alpha+1 & 2\alpha-3 & -2\alpha+3 \\ 2 & 6 & -5 \\ \alpha+1 & \alpha+1 & -\alpha \end{bmatrix}$ με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Βρείτε για ποιες τιμές του α ο πίνακας $A(\alpha)$ είναι διαγωνοποιήσιμος με μετασχηματισμό ομοιότητας και για ποιες όχι. (1μ)

ii) Κατασκευάστε πίνακα X τέτοιον ώστε να ισχύει $X^2 = A(7)$. (1μ)

iii) Για τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ο πίνακας $A(\alpha)$ δεν είναι διαγωνοποιήσιμος με μετασχηματισμό ομοιότητας, κατασκευάστε πλήρως την κανονική μορφή Jordan του $A(\alpha)$ και τον αντίστοιχο πίνακα ομοιότητας. (1μ)

ΘΕΜΑ BONUS. Έστω ένας $\nu \times \nu$ πίνακας A και μ μια ιδιοτιμή του A. Αν x, y δύο μη μηδενικά ιδιοδιανύσματα (στήλες) τέτοια ώστε $Ax = \mu x$, $y^*A = \mu y^*$ και $y^*x = 0$, να αποδείξετε ότι η μ είναι πολλαπλή ιδιοτιμή του A. (Υπόδειξη: Αν η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής μ είναι μεγαλύτερη του 1, τότε δεν χρειάζεται να αποδείξουμε κάτι. Για το λόγο αυτό, υποθέτουμε ότι η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής μ είναι ίση με 1.) (1μ)

Διάρκεια εξέτασης: 2,5 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ