Αντώνιος Συμβώνης

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστήμων
Τομέας Μαθηματικών

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
4 Ιουλίου 2017

- **Διάρκεια: 2 ώρες.**
- **Καλή επιτυχία.**

Θέμα 1ο

Έστω $T[1..n]$ ένα <u>ταξινομημένο σε αύξουσα σειρά</u> διάνυσμα από ακεραίους.

(a) Να σχεδιάσετε έναν O(n) αλγόριθμο για το παρακάτω πρόβλημα:
«Να βρεθεί ένα ζεύγος αριθμών a και b από το διάνυσμα οι οποίοι έχουν άθροισμα μηδέν (δηλαδή, a+b=0) ή να αναφερθεί ότι δεν υπάρχει τέτοιο ζεύγος.»

(b) Να σχεδιάσετε έναν $O(n^2)$ αλγόριθμο για το παρακάτω πρόβλημα:
«Να βρεθεί μία τριάδα αριθμών a, b και c από το διάνυσμα οι οποίοι έχουν άθροισμα μηδέν (δηλαδή, a+b+c=0) ή να αναφερθεί ότι δεν υπάρχει τέτοια τριάδα.»

Να αιτιολογήσετε την ορθότητα των αλγορίθμων σας καθώς και την πολυπλοκότητά τους.

Θέμα 2ο

Αποφανθείτε για την ορθότητα ή μη των παρακάτω ισχυρισμών, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.

a. Ο αλγόριθμος του Dijkstra δουλεύει με αρνητικά βάρη, αρκεί να προσθέσουμε σε όλες τις ακμές την ίδια σταθερά c, με την ιδιότητα να τις καθιστά όλες μη αρνητικές.

b. Εάν έχουμε υπολογίσει ένα ελάχιστο διασυνδετικό δένδρο T ενός γραφήματος, τότε κάθε μονοπάτι στο T από μία κορυφή v προς μία άλλη κορυφή w είναι και συντομότερο μονοπάτι του αρχικού γραφήματος.

Θέμα 3ο

Μια κορυφή ενός μη κατευθυνόμενου δένδρου T ονομάζεται ***κέντρο*** (*center*) εάν ελαχιστοποιεί την μέγιστη απόσταση του από τα φύλλα του T. Να σχεδιαστεί αλγόριθμος που σε $O(n)$ χρόνο εντοπίζει τα κέντρα ενός δένδρου, όπου n είναι ο αριθμός των κορυφών του δένδρου.

Θέμα 4ο

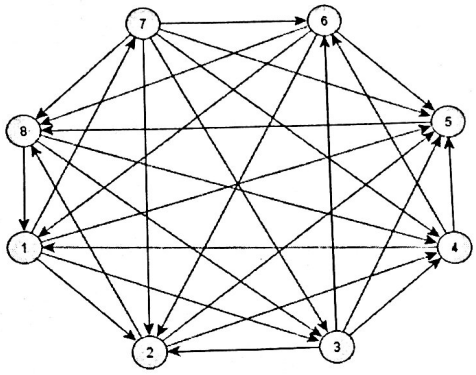
Έστω ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G=(V,E)$ $\cancel{\bar{G} = (V, E)}$. Ένα «κάλυμμα κορυφών» (vertex cover) είναι ένα υποσύνολο V' του V τέτοιο ώστε κάθε ακμή του γραφήματος έχει τουλάχιστον το ένα άκρο της στο σύνολο V', δηλ. για κάθε ακμή $(u,v) \in E$ $(u \in V')$ ή $(v \in V')$.

Να δειχθεί ότι το γράφημα G περιέχει ένα πλήρες γράφημα μεγέθους k εάν και μόνο εάν το συμπληρωματικό του γράφημα $\bar{G}$ περιέχει ένα κάλυμμα κορυφών μεγέθους $|V|-k$.

ΓΥΡΙΣΤΕ ΣΕΛΙΔΑ

Θέμα 5ο

Ένα τουρνουά (tournament) είναι ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G=(V,E)$ τέτοιο ώστε για κάθε ζεύγος κορυφών $u,v \in V$, ακριβώς μία από τις ακμές (u,v), (v,u) ανήκει στο E. Για παράδειγμα, το παρακάτω γράφημα είναι ένα τουρνουά.



1) Να δείξετε ότι σε ένα τουρνουά με $n+1$ κορυφές, αν θεωρήσουμε μία οποιαδήποτε κορυφή u, και μία οποιαδήποτε αρίθμηση $v_1, \ldots, v_n$ των υπολοίπων κορυφών, τότε ισχύει τουλάχιστον ένα από τα παρακάτω:
   a) Η u συνδέεται με την v_1
   b) Η v_n συνδέεται με την u
   c) Υπάρχει δείκτης k, $1 \le k \le n-1$, τέτοιος ώστε η v_k συνδέεται με την u και η u συνδέεται με την v_{k+1}

2) Ένα **μονοπάτι Hamilton** σε ένα κατευθυνόμενο γράφημα είναι ένα κατευθυνόμενο μονοπάτι το οποίο περνά από κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.

<u>Να αποδειχθεί με επαγωγή,</u> ότι ένα τουρνουά έχει πάντοτε ένα μονοπάτι Hamilton.

Σύσταση: Να γίνει χρήση της ιδιότητας που περιγράφει το πρώτο σκέλος του ερωτήματος.