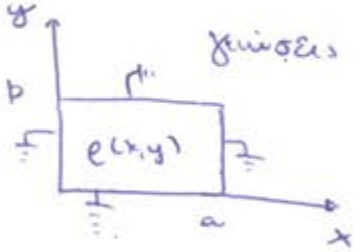
ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ (Χαραλαμπόπουλος) 13/3/2015

Ηλεκτροστατική (1) $\vec{E} = -\nabla u(x,y)$

$$\nabla \vec{E} = \frac{\rho(x,y)}{\varepsilon_0} \quad \Big\} \quad \nabla(-\nabla u(x,y)) = \frac{\rho(x,y)}{\varepsilon_0}$$

$$\to \Delta u(x,y) = -\frac{\rho(x,y)}{\varepsilon_0} \to \boxed{u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = -\frac{\rho(x,y)}{\varepsilon_0}}$$ εξίσωση Poisson

Δ.Ε. 2ης τάξης μη ομογενής



$$\begin{cases} u(0,y) = u(a,y) = 0 \\ u(x,0) = u(x,b) = 0 \end{cases}$$

Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών

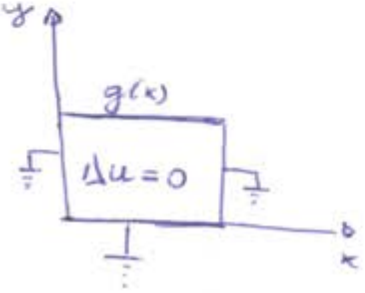
$\ddot{y}(t) + y(t) = t$

$y(0) = 1$

$y'(0) = 0$

Πρόβλημα αρχικών τιμών

(2)



$$\boxed{u_{xx} + u_{yy} = 0}$$ εξίσωση Laplace

$$\left.\begin{array}{l} u(0,y) = u(a,y) = 0 \quad 0 \le y \le b \\ u(x,0) = 0, \; u(x,b) = g(x) \quad 0 \le x \le b \end{array}\right\} \text{Π.Σ.Τ.}$$

(3) Έστω πολωμένη στα άκρα ελαστική χορδή μήκους ℓ

κατακόρυφες ταλαντώσεις $u(x,t)$

$$\boxed{u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t)} \quad 0 < x < \ell, \; t > 0$$

$\{u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \; t \ge 0\}$ Συνοριακές Συνθήκες

$u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$ Αρχικές Συνθήκες

Πρόβλημα αρχικών συνοριακών τιμών

αν είχα χωροεξαρτημένη δύναμη $u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t) + F(x,t)$ (μη ομογενής κυματική)

(4) Εξίσωση θερμότητας

από εδώ το κρύο (θέλουν μεγάλο μέτρο)

$\vec{q} = \sigma \nabla u = -u_x(x,t)$ εάν θερμότητας

$u(x,t)$: θερμοκρασία του σημείου x την χρονική στιγμή t. Θεωρούμε ότι η ανταλλαγή θερμότητας γίνεται μόνο στα $x=0$, $x=\ell$

$$u_t(x,t) = a u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < \ell, \; t > 0$$

δεν επιτρέπω ανταλ. θερμ.

$u(x,0) = f(x) \quad 0 \le x \le \ell$ Α.Σ. π.χ. $u(0,t) = 0$, $u_x(\ell,t) = 0$, $t \ge 0$

Παρεμβολή (Poisson) αντί για  έχω  $\Delta u = -f$

$\Delta u(\rho,\phi) = -f(\rho,\phi)$

$u(a,\phi) = 0$

άρα και στο παρ/πο έχω μια συμμετρική συνθήκη!

$y'' + \lambda y = f(x)$

$0 < x < \ell$ $\quad \left.\begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y'(\ell) = 1 \end{array}\right\}$ ~~αρχικές~~ συνοριακά προβλήματα

μιας διαφορικής εξισώσεως.

ΣΥΝΟΡΙΑΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Η απλούστερη περίπτωση: Το μονοδιάστατο συνοριακό πρόβλημα.

Κάποια ενδεικτικά παραδείγματα.

a) $y''(t) + y(t) = \boxed{1}$ $\quad 0 < t < \pi$

$y(0) = y(\pi) = 0$

b) $y''(t) + y(t) = \boxed{\sin(2t)}$

$y(0) = y(\pi) = 0$

Το ΘΥΜ αφορά προβλήματα αρχικών τιμών!

$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + 1$

$y(0) = 0 \to c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 + 1 = 0 \to c_1 = -1$

$y(\pi) = 0 \to c_1(-1) + c_2 0 + 1 = 0 \to c_1 = 1$

άτοπο. Το συνοριακό πρόβλημα a) δεν έχει λύση!

$y''(t) + y(t) = \sin(2t)$

$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + y_{ειδ}(t)$

$y_{ειδ}(t) = A\sin(2t)$ (ρίζες χ.πολ. $\pm i$, 2i όχι ρίζα)

$-4A + A = 1 \to A = -1/3$

άρα $y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t - \frac{1}{3}\sin(2t)$

(22) $y(0)=0 \to c_1 \cdot 1 + c_2\, 0 - \frac{1}{3}\, 0 = 0 \to \boxed{c_1 = 0}$

(2)

$y(\pi)=0 \to c_1(-1) + c_2 \cdot 0 - \frac{1}{3}\, 0 = 0 \to \boxed{c_1 = 0}$

$y(t) = c_2 \sin t - \frac{1}{3}\sin(2t)$ αποκτήσαμε λύσεις!

γ) $y''(t) + 2y(t) = 1 \quad 0<t<\pi$

$y(0) = y(\pi) = 0$

$(\lambda^2 + 2 = 0 \to \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}\, i)$

$y(t) = c_1 \cos\sqrt{2}\, t + c_2 \sin\sqrt{2}\, t + \frac{1}{2}$

$$\left.\begin{aligned} &y(0)=0 \to c_1 \cdot 1 + c_2\, 0 + \frac{1}{2} \to c_1 = -1/2 \\ &y(\pi)=0 \to c_1 \cdot \cos(\sqrt{2}\pi) + c_2 \cdot \sin(\sqrt{\pi}) = -\frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \quad c_2 = \frac{1}{\sin(\sqrt{2}\pi)}\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\sqrt{2}\pi)\right]$$

Έστω το συνοριακό πρόβλημα

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda y(x) = 0 & 0<x<a \\ y(0) = y(a) = 0 \end{cases}$$

α) $\lambda = 0$, β) $\lambda < 0$, γ) $\lambda > 0$ Διερεύνηση για μη τετριμμένες λύσεις.

α) $y''(x) = 0 \to y(x) = Ax + B$

$y(0) = 0 \to \underline{B=0}$ και $y(a) = 0 \to Aa = 0 \xrightarrow{a \neq 0} \underline{A=0}$

άρα $\underline{y(x)=0}$ / αν δω το λ ως ιδιοτιμή, το $\lambda_0 = 0$ δεν είναι ιδιοτιμή

β) $\lambda < 0 \quad \lambda = -k^2, \; k>0 \quad y'' - k^2 y = 0 \to y(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}$

$y(0) = 0 \to A = -B$

$y(a) = 0 \to A(e^{ka} - e^{-ka}) = 0 \to A = 0$ άρα και $B = 0$

$\underline{y(x)=0}$ άρα όλες οι $\lambda < 0$ δεν είναι ιδιοτιμές

γ) $\lambda > 0$ $\quad \lambda = k^2$, $k > 0$ $\rightarrow y'' + k^2 y = 0 \rightarrow y(x) = A\cos kx + B\sin kx$

$y(0) = 0 \rightarrow \underline{A = 0}$

$y(a) = 0 \rightarrow B \cdot \sin(ka) = 0 \xRightarrow[\text{απαιτώ } \underline{B \neq 0}]{} \sin(ka) = 0 \rightarrow \underline{ka = n\pi}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

άρα $k_n = \frac{n\pi}{a}$

ιδιοτιμές $\boxed{\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}$

ιδιοσυναρτήσεις $\boxed{y_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right)}$

Αν οι αρχικές μας συνθήκες είναι

$\underbrace{y(0) = y'(a) = 0}$

υπάρχουν άπειρες ιδιοτιμές $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n \leq \ldots$

με $\lim_{n \to +\infty} \lambda_n = +\infty$ για τις οποίες

προκύπτουν μη τετριμμένες λύσεις

$y_n(x)$. Όταν $\lambda \neq \lambda_n$, η μοναδική

λύση του προβλήματος είναι η

$y(x) = 0$

όπως τα ιδιοδιανύσματα είναι υπόχωροι (διανύσματα με ίδια κατεύθυνση) έτσι και οι ιδιοσυναρτήσεις είναι άπειρες (πολλαπ.) η μία της άλλης.

$\lambda_n = \left(\frac{(2n+1)\pi}{2a}\right)^2$

Ειδικά για το παράδειγμα εδώ, $y_n(x) = B_n \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2a}\right)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

$(f, g) = \int_0^a f(x) g(x) dx$ γενίκευση εσ. γινομένου

$\|f\|^2 = (f, f) = \int_0^a |f(x)|^2 dx$ γενίκευση μέτρου

Q $\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$

$$B_n B_m \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx \underset{\text{αποδεικνύεται}}{=} B_n B_m \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{a}{2}, & n = m \end{cases}$$

άρα το μέτρο $|y_n(x)|^2 = \frac{a}{2} B_n^2$, άρα αν $B_n = \sqrt{\frac{2}{a}}$

τότε η ιδιοσυνάρτηση έχει μεταβλητή $\underline{1}$, οπότε το ορθοκανονικό σύνολο.

$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = 1$

ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ Sturm–Liouville

20/3/1

③

Πλούσιο παράδειγμα $y''(x)+\lambda y(x)=0$ $\quad 0<x<a$.

$y(0)=y(a)=0$

Η τετριμμένη λύση $y(x)=0$ πάντα ικανοποιεί τα ομογενή προβλήματα, εμείς μας ενδιαφέρουν οι μη τετριμμένες λύσεις.

$$\left.\begin{cases} -y''(x)=\lambda y(x) \\ y(0)=y(a)=0 \end{cases} \quad 0<x<a \right\} \Rightarrow Ly(x)=\lambda y(x)$$

$$(A\underline{y}=\lambda \underline{y})$$

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \quad , n\in\mathbb{N}$$

$$y_n(x)=B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

$\downarrow \sqrt{\frac{2}{a}}$ για ορθοκανονικοποίηση $\left(\begin{array}{l} \int_0^a |y_n(x)|^2 dx=1 \\ \int_0^a y_n(x)y_m(x)dx=0 \quad n\neq m \end{array}\right)$

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy(x)}{dx}\right)+q(x)y(x)=\lambda r(x)y(x) \Leftrightarrow Ly(x)=\lambda r(x)y(x)$$

κανονικό πρόβλημα Sturm–Liouville: $p(x)>0 \quad a\le x\le b$

$r(x)>0 \quad a<x<b$ (ανάφορη βάρους)

$q(x)$ αυθαίρετη

Διοριακές Συνθήκες

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\Sigma1(a)\ c_{11}y(a)+c_{12}y'(a)=0 \\ \Sigma\Sigma2(b)\ c_{21}y(b)+c_{22}y'(b)=0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} c_{11}^2+c_{12}^2\neq 0 \\ c_{21}^2+c_{22}^2\neq 0 \end{array}$$

Παράδειγμα: $y''+y'+\frac{1}{4}y+\lambda y=0 \xrightarrow{*p(x)} \underline{p(x)y''+p'(x)y'}+\frac{1}{4}p(x)y+\lambda p(x)y=0$

$$\frac{d}{dx}(p(x)y')=p'(x)y'(x)+p(x)y''(x) \Rightarrow p'(x)=p(x) \Rightarrow p(x)=e^x$$

τότε $-\frac{d}{dx}\left(\overset{p(x)}{e^x}\frac{dy}{dx}\right)\overset{-q(x)}{\left(-\frac{1}{4}e^x\right)}y=\lambda \overset{r(x)}{e^x}y$

Άρα για να το φέρω στην κανονική μορφή Sturm-Liouville:

$y''(x) + h(x)y'(x) + \dots$ πολ/γω με $p(x)$

$$= \underbrace{p(x)y''(x) + h(x)\,p(x)\,y'(x)} + \dots$$

$$= \underbrace{\frac{d}{dx}\left(p(x)\,y'(x)\right)} + \dots$$

$$\left\{\begin{array}{l} p'(x) = p(x)h(x) \\ \dfrac{dp}{p} = h(x)dx \to \underline{\underline{p(x) = e^{\int h(x)dx}}} \end{array}\right.$$

<u>Συμμετρικός πίνακας</u> : $A^T = A$

τότε $\underline{y}^T A \underline{y} \overset{A^T=A}{=} (A\underline{y})^T \underline{y}$ (τότε $\lambda_i \in \mathbb{R}$ και έχω κάθετα ιδιοδιανύσματα)

Μόνο όταν ο L γράφεται στην κανονική μορφή Sturm-Liouville έχω την έννοια της συμμετρίας στην Δ.Ε.

$$\underbrace{\int_a^b (Ly_1(x))\,\overline{y_2(x)}\,dx}_{\langle Ly_1, y_2\rangle} \overset{?}{=} \underbrace{\int_a^b y_1(x)\left(\overline{Ly_2(x)}\right)dx}_{\langle y_1, Ly_2\rangle}$$

, όπου y_1, y_2 ικανοποιούν τις ΣΣ1 και ΣΣ2.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ 1

$$\int_a^b Ly_1(x)\cdot\overline{y_2(x)}\,dx = \int_a^b \left[-\frac{d}{dx}\left(p(x)\,y_1'(x)\right) + q(x)y_1(x)\right]\overline{y_2(x)}\,dx =$$

$$= \left[-p(x)y_1'(x)\,\overline{y_2(x)}\right]\Big|_a^b + \int_a^b p(x)\,y_1'(x)\,\overline{y_2'(x)}\,dx + \int_a^b q(x)y_1(x)\,\overline{y_2(x)}\,dx =$$

$$= \underbrace{-\left[p(x)y_1'(x)\,\overline{y_2(x)}\right]\Big|_a^b + \left[p(x)y_1(x)\,\overline{y_2'(x)}\right]\Big|_a^b} - \int_a^b y_1(x)\frac{d}{dx}\left(p(x)\,\overline{y_2'(x)}\right)dx$$

$$+ \int_a^b q(x)y_1(x)\,\overline{y_2(x)}\,dx = \left[p(x)\,W(y_1, \bar{y}_2)\right]_a^b + \int_a^b y_1(x)\underbrace{\overline{\left[-\frac{d}{dx}\left(p(x)y_2(x)\right) + q(x)y_2(x)\right]}}_{L\overline{y_2(x)}}dx$$

$$W(y_1, \bar{y}_2) = \begin{vmatrix} y_1 & \bar{y}_2 \\ y_1' & \bar{y}_2' \end{vmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} c_{21} y_1(b) + c_{22} y_1'(b) &= 0 \\ c_{21} \bar{y}_2(b) + c_{22} \bar{y}_2'(b) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad W(y_1, \bar{y}_2)(b) = 0$$

και αν υποθέσουμε $W(y_1, \bar{y}_2)(a) = 0$

άρα $\quad p(x)\, W(y_1, y_2)\Big]_a^b = 0$

άρα $\quad \displaystyle\int_a^b Ly_1(x)\, \overline{y_2(x)}\, dx = \int_a^b y_1(x)\, \overline{Ly_2(x)}\, dx$

και L: αυτοσυζυγής διαφορικός τελεστής.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: Κάθε ιδιοτιμή του προβλήματος S-L που ανήκει στο (1),(2) είναι πραγματική.

2

Απόδειξη: Έστω ιδιοτιμή λ με αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση $y(x)$

$$\underbrace{\int_a^b Ly(x)\, \overline{y(x)}\, dx}_{} = \lambda \int_a^b r(x)\, (y(x))^2\, dx$$

στο δεξί μέλος έχω θετική ποσότητα

από αυτοσυζυγία $\quad \displaystyle\int_a^b y(x)\, (\overline{Ly(x)})\, dx = \lambda \int r(x)\, (y(x))^2\, dx \quad \underline{\underline{\text{συζυγής}}}$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_a^b \overline{y(x)}\, Ly(x)\, dx}_{} = \bar{\lambda} \int r(x)\, (y(x))^2\, dx \Rightarrow \underline{\lambda = \bar{\lambda}} \rightarrow \underline{\underline{\lambda \in \mathbb{R}}}$$

<u>Ορισμός</u>: Εσωτερικό γινόμενο συναρτήσεων $f(x), g(x)$ που ορίζονται στο (a,b) και είναι τετραγωνικά (*) ολοκληρώσιμες με συνάρτηση βάρους $r(x)$

$$(f,g) = \int_a^b r(x)\, f(x)\, \overline{g(x)}\, dx \qquad \|f\|^2 = \int_a^b r(x)\, |f(x)|^2\, dx = (f,f)$$

$$(*) \int_a^b r(x)\, |f(x)|^2\, dx < \infty.$$

Θεώρημα: Ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνιες ($(y_n, y_m) = 0 \quad \forall n \neq m$)

3

Απόδειξη: Έστω $\lambda_n \neq \lambda_m$ δύο ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις τους $y_n(x)$ και $y_m(x)$.

$$Ly_n(x) = \lambda_n r(x) y_n(x) \rightarrow \int_a^b \overline{y_m(x)} L y_n(x) dx = \lambda_n \int r(x) y_n(x) \overline{y_m(x)} dx \quad (1)$$

$$Ly_m(x) = \lambda_m r(x) y_m(x) \rightarrow \int_a^b \overline{y_n(x)} L y_m(x) dx = \lambda_m \int_a^b r(x) y_m(x) \overline{y_n(x)} dx \quad (2)$$

$$(\bar{2}) \Rightarrow \int_a^b \overline{L y_m(x)} y_n(x) dx = \lambda_m \int_a^b r(x) y_n(x) \overline{y_m(x)} dx$$

και από ιδιότητα αυτοσυζυγίας:

$$\int_a^b \overline{y_m(x)} L y_n(x) dx = \lambda_m \int_a^b r(x) y_n(x) \overline{y_m(x)} dx \quad (3)$$

Αφαιρώ κατά μέλη (1) − (3):

$$0 = (\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b r(x) y_n(x) \overline{y_m(x)} dx$$ όμως αφού $\lambda_n \neq \lambda_m$ τότε

$$\int_a^b r(x) y_n(x) \overline{y_m(x)} dx = 0 \Rightarrow (y_n, y_m) = 0 \quad \forall n \neq m.$$

Αποδεικνύεται (αλλά είναι δύσκολο) ότι υπάρχουν άπειρες από τις ιδιοτιμές $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ (αριθμήσιμο σύνολο) και $\lim_{n \to +\infty} \lambda_n = +\infty$ ("τελικά είναι θετικές" υπάρχουν και αρνητικές)

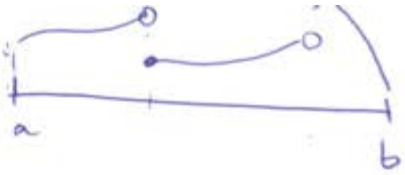
Επίσης αποδεικνύεται ότι οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις αποτελούν βάση στο χώρο των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με συνάρτηση βάρους $r(x)$.

→ $\forall f$ για την οποία $\|f\|^2 = (f, f) < \infty$ (δηλαδή, $\exists M > 0 : \|f\|^2 \leq M$)

$\exists$ συντελεστές c_i τέτοιοι ώστε $\left\| f - \sum_{i=1}^{N} c_i y_i(x) \right\| \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$

όπου τα $y_1, y_2, \dots, y_N$ είναι ιδιοσυναρτήσεις

Τμηματικά λεία συνάρτηση



f, f' συνεχείς τμηματικά

τότε $$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x)$$

Σε κάθε σημείο συνέχειας: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n) y_n(x)$ $\forall\, x \in (a,b)$

οταν. συντελεστές πρ υπολογίζονται!

απλό παρ (Pia)

Αν $\vec{a} = a_1\hat{x}_1 + a_2\hat{x}_2 + a_3\hat{x}_3$ υπολογισμός των a_i: $\vec{a}\hat{x}_1 = a_1$, $\vec{a}\hat{x}_2 = a_2$, $\vec{a}\hat{x}_3 = a_3$.

Αντίστοιχα $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x)$

$m \in \mathbb{N}$: $$(f, y_m) = \int_a^b r(x) f(x) \overline{y_m(x)}\, dx = \int_a^b r(x) \overline{y_m(x)} \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x)\right) dx \overset{\text{λόγω ανισότητα}}{=}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b r(x) \overline{y_m(x)} y_n(x)\, dx = c_m \int r(x) |y_m(x)|^2 dx = c_m \|y_m\|^2$$

$\forall\, m \neq n$ από ορθογωνιότητα $= 0$.

Άρα τελικά $$\boxed{c_m = \frac{(f, y_m)}{\|y_m\|^2}}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

Χρησιμοποιώντας τις δύο σχέσεις:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, y_n)}{\|y_n\|^2} y_n(x)$$

αν έχω ορθοκανονικοποιημένα: $\tilde{y}_n(x) = \dfrac{y_n(x)}{\|y_n\|}$

άρα $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \tilde{y}_n) \tilde{y}_n(x)$$

κανόνας

$$a_1 = \frac{\vec{a}\hat{x}_1}{\|\hat{x}_1\|^2}$$

όμως $\|\hat{x}_1\| = 1$

$L = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x) \quad a<x<b \quad , p(x)>0$ 27/3/2015

κανονικό πρόβλημα ιδιοτιμών - ιδιοσυναρτήσεων
Sturm-Liouville

$Ly(x) = \lambda r(x) y(x)$

$a<x<b \quad , r(x)>0$

συνοριακές συνθήκες: $c_{11} y(a) + c_{12} y'(a) = 0$

$c_{21} y(b) + c_{22} y'(b) = 0$

i) Υπάρχουν άπειρες πραγματικές ιδιοτιμές λ_n, $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots \quad \lambda_n \to +\infty$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$y_1(x) \quad y_2(x) \quad y_n(x)$

και $(y_n, y_m) = \int_a^b r(x) y_n(x) \overline{y_m(x)} dx = 0 \quad \forall n \neq m.$

ii) Οποιαδήποτε τμηματικά λεία συνάρτηση f γράφεται $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n y_n(x)$ (α $y_n(x)$ ανοιχτού βάσης), με $d_n = \int_a^b r(x) f(x) y_n(x) dx$, αν $\|y_n\| = 1$.

Παράδειγμα

$y'' + \lambda y = 0 \quad , 0<x<\pi$ συνοριακές: $y(0) + y'(0) = 0$

$y(\pi) + y'(\pi) = 0$

$p(x) = r(x) = 1$

$q(x) = 0$

$c_{ij} = 1 \quad i,j = 1,2.$

$\lambda < 0$ θέτω $\lambda = -\beta^2$, $\beta > 0$ τότε $y'' - \beta^2 y = 0 \Rightarrow y(x) = Ae^{\beta x} + Be^{-\beta x}$

ΣΣ1 $\mapsto y(0) + y'(0) = 0 \to A + B + \beta(A - B) = 0 \to \underline{A(1+\beta) + B(1-\beta) = 0}$ (1)

ΣΣ2 $\mapsto y(\pi) + y'(\pi) = 0 \to Ae^{\beta\pi} + Be^{-\beta\pi} + \beta(Ae^{\beta\pi} - Be^{-\beta\pi}) = 0$

$\underline{A(1+\beta)e^{\beta\pi} + Be^{-\beta\pi}(1-\beta) = 0}$ (2)

λύνω ως προς A και αντικαθιστώ

$(2) \xrightarrow{(1)} (-e^{+\beta\pi} + e^{-\beta\pi}) B(1-\beta) = 0 \to \beta = 1$ ή $B = 0$

τότε $A = 0$ τότε $A = 0$

άρα $\lambda = -\beta^2 = -1$ ιδιοτιμή και $\underline{y_1(x) = B_1 e^{-x}}$

$\underline{\underline{\lambda=0}}$ $\quad y''(x)=0 \to y(x)=Ax+B$

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\Sigma 1 \mapsto A\cdot 0+B+A=0 \\ \Sigma\Sigma 2 \mapsto A\pi+B+A=0 \end{array}\right\} \quad A=B=0 \text{ άρα } \lambda=0 \text{ δεν είναι ιδιοτιμή!}$$

$\underline{\underline{\lambda>0}}$ θέτω $\lambda=\beta^2,\ \beta>0$ $\quad y''+b^2y=0 \to y(x)=A\cos(bx)+B\sin(bx)$

$$y'(x)=+b(-A\sin(bx)+B\cos(bx))$$

$\Sigma\Sigma 1 \mapsto \underline{A+Bb=0}^{(*)}$ $\quad \Sigma\Sigma 2 \mapsto A\cos(b\pi)+B\sin(b\pi)+b(-A\sin(bn)+b\cos(bn))=$

$\to A(\cos(bn)-b\sin(bn))+B(\sin(b\pi)+b\cos(bn))=0 \xrightarrow{(*)}$

$\to -Bb\cos(bn)+Bb^2\sin(bn)+B\sin(bn)+Bb\cos(b\pi)=0$

$\to B(1+b^2)\sin(bn)=0 \xrightarrow{B\neq 0} \sin(b\pi)=0 \to b_n=n,\ n=1,2,3,\dots$

$\lambda_n=n^2,\ n\in\mathbb{N}$

άρα $y_n(x)=-nB_n\cos(nx)+B_n\sin(nx) \to y_n(x)=B_n(\sin(nx)-n\cos(nx))$

α) ορθογωνιότητα: $\int_0^\pi 1\cdot y_n(x)\cdot\overline{y_m(x)}\,dx \overset{n\neq m}{=} 0$ (HW)

β) κανονικοποίηση των ιδιοσυναρτήσεων: $\|y_n\|^2=1 \to B_n^2\int_0^\pi(\sin(nx)-n\cos(nx))^2=1$

$$I=\int_0^\pi(\sin^2(nx)+n^2\cos^2(nx)-2n\sin(nx)\cos(nx))\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\pi+n^2\frac{\pi}{2}-n\cancel{\int_0^\pi\sin(2nx)\,dx}=\frac{\pi}{2}(n^2+1)\ ;\ \text{άρα}$$

$$B_n=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\ ,\ \text{άρα}\ y_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}(\sin(nx)-n\cos(nx))$$

$$\left\{\begin{array}{l} \cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2} \\ \sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2} \\ \sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha \end{array}\right.$$

ΗΜΙΟΜΟΓΕΝΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ S-L

$$Ly(x) = \lambda r(x) y(x) + \underline{f(x)} \qquad a<x<b$$

$$c_{11} y(a) + c_{12} y'(a) = 0 \qquad c_{11}^2 + c_{12}^2 \neq 0$$

$$c_{21} y(b) + c_{22} y'(b) = 0 \qquad c_{21}^2 + c_{22}^2 \neq 0.$$

Το 2 μας το δίνουν!

$$L = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x) \qquad p(x), q(x) > 0.$$

Από την ανάλυση του <u>ομογενούς</u> προβλήματος πρότεινε η ομογένεια των ορθοκανονικών ιδιοσυναρτήσεων $y_n(x)$ με τη βασική ιδιότητα της <u>πληρότητας</u>. Άρα δικαιώμαστε να εκφράσουν τη λύση $y(x)$ του ημι-ομογενούς προβλήματος ως $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x)$ (1)

Αντικαθιστώ την (1) στην Δ.Ε:

$$L\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x)\right) = \lambda r(x) \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x) + f(x) \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n (L y_n(x)) = \lambda r(x) \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x) + f(x)$$

Γνωρίζω ότι $Ly_n(x) = \lambda_n r(x) y_n(x)$ τότε:

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n (\lambda_n - \lambda) y_n(x)\right] r(x) = \frac{f(x)}{r(x)} r(x)$$

$\frac{f(x)}{r(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} d_n y_n(x)$, όπου d_n γνωστά. $d_n = \int_a^b \cancel{r(x)} \frac{f(x)}{\cancel{r(x)}} y_n(x) dx = \int_a^b f(x) y_n(x) dx$

τότε $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (\lambda_n - \lambda) y_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n y_n(x) \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \{c_n(\lambda_n - \lambda) - d_n\} y_n(x) = 0$

$\forall x \in (a,b)$

$\rightarrow \boxed{c_n(\lambda_n - \lambda) = d_n}$ (*)

Περιπτώσεις

i) $\lambda \neq \lambda_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ τότε $c_n = \frac{d_n}{\lambda_n - \lambda}$ και αντικαθιστώ στην (1):

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{\lambda_n - \lambda} y_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_a^b f(x') y_n(x') dx'}{\lambda_n - \lambda} y_n(x) =$$

$$\cancel{\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f(x') y_n(x') dx'} = \int_a^b dx' f(x') \left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n(x) y_n(x')\right) = \int_a^b dx' \underbrace{K(x,x')}_{\text{πυρήνας Green}} f(x')$$

ii) $\lambda = \lambda_m$ (Η παράμετρος λ ταυτίζεται με μια από τις ιδιοτιμές του προβλήματος)
↓
συμπεριφερόμενος φυσικός

τότε η (α) $c_n(\lambda_m - \lambda) = 0 \rightarrow \underline{\underline{d_m = 0}}$.

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις: το πρόβλημα να μην έχει λύση, ή να ισχύεται την παραπάνω σχέση: $\int_a^b f(x')y_m(x')dx' = 0$.

> Αν η $f(x)$ δε ισχύει τη σχέση $d_m = \int_a^b f(x)y_m(x)dx = 0$ τότε το μη ομογενές πρόβλημα δεν έχει λύση.

> Αν η $f(x)$ υπακούει τη σχέση $d_m = 0$ τότε το μη ομογενές πρόβλημα είναι αόριστο, $y(x) = \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq m}}^{\infty} \frac{d_n}{\lambda_n - \lambda} y_n(x) + c_m y_m(x)$
↓
αυθαίρετες

Παράδειγμα

$y'' + y = f(x) \qquad 0 < x < \pi.$

$y(0) = y(\pi) = 0.$

$\underline{\lambda = 1}$ ομογενές: $\left.\begin{array}{l} y_n'' + \lambda_n y_n = 0 \\ y_n(0) = y_n(\pi) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lambda_n = n^2, \ n \in \mathbb{N} \\ y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx). \end{array}$

Συνεχώς, το λ που μου δίνουν ταυτίζεται με το $\lambda_1 = 1^2$.

$d_1 = \int_0^\pi f(x) y_1(x) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi f(x) \sin(1x) dx$

$\rightarrow$ αν $f(x) = \sin x$: $y'' + y = \sin x$
$y(0) = y(\pi) = 0$

ομογενές $y(x) = A\cos x + B\sin x$.

γενική: $y(x) = A\cos x + B\sin x - \frac{1}{2} x\cos x$

$y(0) = 0 \rightarrow A = 0$, $y(\pi) = 0 \rightarrow B \cdot 0 - \frac{1}{2}\pi(-1) = 0$ <u>άτοπο</u>

άρα δεν έχω καμία λύση.

αν $f(x) = \sin 2x$ έχω άπειρες!!

Παράδειγμα Ομογενούς Προβλήματος Sturm-Liouville

3/4/2015

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0 \quad , 0<x<\pi$$

$$y(0) = 0$$

$$2y(\pi) - y'(\pi) = 0$$

Εύρεση ιδιοτιμών - ιδιοσυναρτήσεων

α) $\underline{\lambda = 0}$ $\quad y''(x) = 0 \to y(x) = Ax + B$

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = 0 \to A\cdot 0 + B = 0 \to \underline{B=0} \\ 2y(\pi) - y'(\pi) = 0 \to 2A\pi - A = 0 \to \underline{A=0} \end{array}\right\} \text{ άρα } \lambda = 0 \text{ } \underline{\text{δεν}} \text{ ιδιοτιμή.}$$

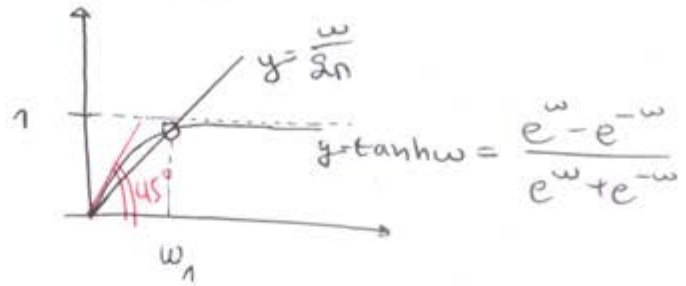
β) $\lambda = -k^2 < 0 \quad (k>0)$: $y''(x) - k^2 y(x) = 0 \to y(x) = A\cosh(kx) + B\sinh(kx)$

$y(0) = 0 \to \underline{A=0}$ $\quad$ άρα $y(x) = B\sinh(kx)$

$2y(\pi) - y'(\pi) = 0 \to 2B\sinh(k\pi) - Bk\cosh(k\pi) = 0 \xrightarrow[B\neq 0]{\text{αναγκάζω}} \boxed{\tanh(k\pi) = \frac{k}{2}}$

Ελπίζουν. $\omega := k\pi$ άρα $\tanh(\omega) = \frac{1}{2\pi}\omega$

γραφική επίλυση



$$\left.\frac{d}{d\omega}\tanh\omega\right|_{\omega=0} = 1$$

άρα η εφαπτομένη της $y = \tanh\omega$ στο $\omega_0 = 0$ σχηματίζει γωνία 45°.

Έχω μόνο 1 κοινό σημείο, το $\omega_1 = k_1\pi \to k_1 = \frac{\omega_1}{\pi}$, $\lambda_1 = -\left(\frac{\omega_1}{\pi}\right)^2$,

όπου ω_1 η μοναδική θετική ρίζα της $\tanh\omega = \frac{\omega}{2\pi}$.

Αν στις αρχικές συνθήκες είχαμε $\overset{\text{π.χ.}}{=} \frac{1}{4}y(\pi) - y'(\pi) = 0$, τότε $\tanh\omega = \frac{4\omega}{2\pi}$

και δε θα είχα καθόλου κοινό σημείο.

β) $\lambda>0$, $\lambda=k^2$ $(k>0)$: $y''(x)+k^2y(x)=0 \rightarrow y(x)=A\cos(kx)+B\sin(kx)$

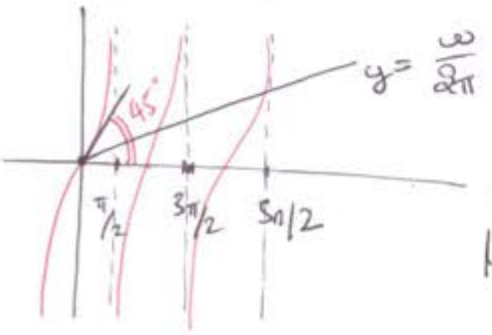
$y(0)=0 \rightarrow A\cos 0 + B\cancel{\sin 0}=0 \rightarrow A=0$ άρα $y(x)=B\sin(kx)$

$2y(\pi)-y'(\pi)=0 \rightarrow 2B\sin(k\pi)-Bk\cos(k\pi)=0 \xrightarrow[B\neq 0]{\text{αναιρώ}} \tan(k\pi)=\frac{k\pi}{2\pi}$.

μπορώσα να διαιρέσω με $\cos(kn)$. Γιατί αν $\cos(kn)=0$ τότε $2B\sin(k\pi)=0$ πάω δεν γίνεται γιατί το $\sin(k\pi)\neq 0$ πάντα (δεν μπορεί να μηδενίζονται μαζί) και αναιρώ $B\neq 0$.

Θέτω $\omega=k\pi$ τότε $\tan\omega=\frac{\omega}{2\pi}$

Γραφική επίλυση



Πάω, $\left.\frac{d}{d\omega}\tan\omega\right|_{\omega=0}=1$ άρα $\theta=45°$

Έχω μια ακολουθία ριζών $(\xi_1=0)<\xi_2<\xi_3<\dots<\xi_n<\dots$

με $\xi_n=k_n\pi \rightarrow k_n=\frac{\xi_n}{\pi}$ και $\lambda_n=k_n^2=\frac{\xi_n^2}{\pi^2}$, $n=2,3,\dots$

άρα $\underline{y_n(x)=B_n\sin\left(\frac{\xi_n}{\pi}x\right)}$ ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στις λ_n.

Ορθογώνιες αλλά όχι μοναδιαίες.

• Δείξτε την ορθογωνιότητα των $y_n(x)$

$$\int_0^\pi y_n(x)y_m(x)\underbrace{r(x)}_{=1}dx \overset{?}{=} 0 \qquad n\neq m,\ n>1$$

$2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$

$$\int_0^\pi B_nB_m\sin\left(\frac{\xi_n\pi}{x}\right)\sin\left(\frac{\xi_m\pi}{x}\right)dx=\frac{B_nB_m}{2}\int_0^\pi\left[\cos\left(\frac{(\xi_n-\xi_m)x}{\pi}\right)-\cos\left(\frac{(\xi_n+\xi_m)x}{\pi}\right)\right]dx$$

$$=B_nB_m\frac{1}{2}\pi\left\{\frac{\sin\xi_n\cos\xi_m-\cos\xi_n\sin\xi_m}{\xi_n-\xi_m}-\frac{\sin\xi_n\cos\xi_m+\sin\xi_m\cos\xi_n}{\xi_n+\xi_m}\right\}$$

$$=\frac{B_nB_m\pi}{2}\left\{\frac{2\xi_m}{\xi_n^2-\xi_m^2}\frac{\sin\xi_n\cos\xi_m}{\cos\xi_n\cos\xi_m}-\frac{2\xi_n}{\xi_n^2-\xi_m^2}\frac{\sin\xi_m\cos\xi_n}{\cos\xi_n\cos\xi_m}\right\}\cdot\left(\begin{array}{c}\text{διαιρώ και πολ/ζω}\\ \cos\xi_n\cos\xi_m\end{array}\right)$$

$$=\frac{B_nB_m\pi}{2}\left\{\frac{2\xi_m}{}\tan\xi\ -\frac{2\xi_n}{}\tan\xi\right\}\cos\xi\ \dots$$

και δεδομένου ότι $\tan \xi_n = \frac{\xi_n}{2\pi}$,

$$= \frac{B_n B_m \pi}{\cancel{2}} \left\{ \frac{2\xi_m}{\xi_n^2 - \xi_m^2} \frac{\xi_n}{\cancel{2}\pi} - \frac{2\xi_n}{\xi_n^2 - \xi_m^2} \frac{\xi_m}{\cancel{2}\pi} \right\} = \dots = 0 \quad \checkmark$$

Κανονικά πρέπει να δείξω και ότι η ιδιοσυνάρτηση $y_1(x)$ της αρχικής (διακριτής) λ_1 είναι ορθογώνια (αν και είναι πιο δύσκολο).

<u>Κανονικοποίηση του $y_n(x)$</u>

$$\|y_n\|^2 = (y_n, y_n) = \int_0 y_n^2(x)\,dx = 1 \rightarrow B_n^2 \int_0^\pi \sin^2\left(\frac{\xi_n x}{\pi}\right) dx = 1$$

$$B_n^2 \frac{1}{2} \int_0^\pi \left[1 - \cos\left(\frac{2\xi_n x}{\pi}\right)\right] dx = \frac{B_n^2}{2} \underbrace{\left\{ \pi - \frac{\pi}{2\xi_n} \sin(2\xi_n) \right\}}_{>0}$$

$\xi_n > \pi$ (δες σχήμα) άρα $\frac{\pi}{\xi_n} < 1$ άρα

$$\rightarrow B_n = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\xi_n}\sin(2\xi_n)}} \quad \checkmark$$

<u>Μεικτή συνθήκη</u>: $Ly(x) = \lambda r(x) y(x) \quad a < x < b \qquad L = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right)$

$$c_{11} y(a) + c_{12} y'(a) + d_{11} y(b) + d_{12} y'(b) = 0$$

$$c_{21} y(b) + c_{22} y'(b) + d_{21} y(a) + d_{22} y'(a) = 0$$

τώρα

Πολλά θεωρητικά αποτελέσματα παραμένουν ίδια. Μια μεγάλη διαφορά είναι ότι τώρα οι ιδιοτιμές δεν είναι καταναγκαστικά απλές!

$y''(x)+\lambda y(x)=0 \qquad 0<x<2\pi$

$$\left.\begin{aligned} y(0)&=y(2\pi) \\ y'(0)&=y'(2\pi) \end{aligned}\right\} \text{περιοδικές συνθήκες}$$

Διερεύνηση

α) $\lambda=0 \rightarrow y''(x)=0 \rightarrow y(x)=Ax+B \quad , y'(x)=A$

$$\left.\begin{aligned} &y(0)=y(2\pi) \rightarrow \cancel{B}=2A\pi+\cancel{B} \rightarrow A=0 \\ &y'(0)=y'(2\pi) \rightarrow A=A \end{aligned}\right\} A=0 \text{ , το } B \text{ αυθαίρετο.}$$

άρα το $\lambda_0=0$ είναι ιδιοτιμή με ιδιοσυνάρτηση $y_0(x)=B\cdot 1=\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}_{\text{κανονικοποίηση}} 1$

β) $\lambda<0$, $\lambda=-k^2$, $k>0 \rightarrow y''(x)-k^2y(x)=0 \rightarrow y(x)=A\cosh(kx)+B\sinh(kx)$

$y(0)=y(2\pi) \rightarrow A\cosh 0+\cancel{B\sinh 0}=A\cosh(k2\pi)+B\sinh(k2\pi)$

$\rightarrow \underline{A(-1+\cosh(2k\pi))+B\sinh(2k\pi)=0}$ (I)

$y'(0)=y'(2\pi) \rightarrow B\cancel{k}\cosh 0=\cancel{k}A\sinh(2k\pi)+\cancel{k}B\cosh(2k\pi) \rightarrow$

$\rightarrow B=A\sinh(2k\pi)+B\cosh(2k\pi) \rightarrow \underline{A\sinh(2k\pi)+B(\cosh(2k\pi)-1)=0}$ (II)

Για να έχει το σύστημα I – II μη μηδενική λύση ως προς A, B, θα πρέπει

$$\begin{vmatrix} -1+\cosh(2k\pi) & \sinh(2k\pi) \\ \sinh(2k\pi) & \cosh(2k\pi)-1 \end{vmatrix}=0 \rightarrow \underline{\cosh^2(2k\pi)}+1-2\cosh(2k\pi)-\underbrace{\sinh^2(2k\pi)}_{=0}$$

$\rightarrow 2(1-\cosh(2k\pi))=0$ <u>άτοπο</u> από $\cosh(2k\pi)>1$

Επομένως $y(x)=0$ άρα δεν υπάρχουν αρνητικές ιδιοτιμές.

β) $\lambda > 0$, $\lambda = k^2$, $(k>0)$: $y''(x) + k^2 y(x) = 0 \to y(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$.

$y(0) = y(2\pi) \to A = A\cos(2k\pi) + B\sin(2k\pi) \to \underline{A(\cos(2k\pi) - 1) + B\sin(2k\pi) = 0}$ (I')

$y'(0) = y'(2\pi) \to B \cdot k = -kA\sin(k2\pi) + B\cos(k2\pi) \Rightarrow$

$\to \underline{A\sin(2k\pi) + B(1 - \cos(2k\pi))} = 0$ (II')

Για αύξηση το I'-II' μη μηδενική λύση:

$$\begin{vmatrix} \cos(2k\pi) - 1 & \sin(2k\pi) \\ \sin(2k\pi) & 1 - \cos(2k\pi) \end{vmatrix} = 0 \to -1 - \cos^2(2k\pi) + 2\cos(2k\pi) - \sin^2(2k\pi) = 0$$

$\to -1 - 1 + 2\cos(2k\pi) = 0 \to \cos(2k\pi) = 1 \to k_n = n$ $(k>0)$ $n = 1, 2, 3, \ldots$

Βρήκαμε $k_n = n$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lambda_n = n^2$ με αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις

$y_n(x) = A_n\cos(nx) + B_n\sin(nx)$

Βάζω στο I'-II' όπου k το n: $\left.\begin{array}{l} A \cdot 0 + B \cdot 0 = 0 \\ A \cdot 0 + B \cdot 0 = 0 \end{array}\right\}$ άρα τα A, B αυθαίρετα.

Επομένως $y_n(x) = A_n\cos(nx) + B_n\sin(nx)$, A_n, B_n αυθαίρετα

$\lambda_0 = 0 \to \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 1 \right\}$

$\lambda_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$ $\to \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx) \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx) \end{array} \right\}$

24/5/2015

Η ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \ , \ 0<x<l, \quad t>0$$

Πακτωμένη χορδή : $u(0,t) = u(l,t) = 0 \ \forall t \geq 0$ Σ.Σ.

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) \\ u_t(x,0) &= g(x) \end{aligned}\right\} \ \text{Α.Σ.} \quad 0 \leq x \leq l$$

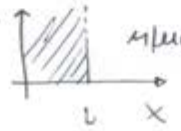
Δημιουργείται ένα ΠΑΣΤ.

Επίλυση με εφαρμογή της μεθοδολογίας του χωρισμού μεταβλητών.
Ψάχνω όλες τις λύσεις της μορφής $u(x,t) = X(x)T(t)$ (1)
Θα δημιουργηθούν u_n που ονομάζονται βάση της λύσης.

Αντικαθιστώ την (1) στην Δ.Ε: $X(x)T''(t) - c^2 T(t) \cdot X''(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda \ \left(\text{σταθερά χωρισμού μεταβλητών}\right)$$

$\forall (x,t) \in$



ημιάπειρη ζωνάρα

Άρα $X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad 0<x<l$

$T''(t) + \lambda c^2 T(t) = 0 \ , \ t>0$

Αντικαθιστώ την (1) στις Σ.Σ:

ΣΣ1 : $u(0,t) = 0 \Rightarrow X(0)\cdot T(t) \overset{\forall t}{=} 0 \Rightarrow \boxed{X(0) = 0}$

ΣΣ2: $u(l,t) = 0 \Rightarrow X(l)\cdot T(t) \overset{\forall t}{=} 0 \Rightarrow \boxed{X(l) = 0}$

το $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ μαζί με τις $X(0) = X(l) = 0$ είναι κανονικό πρόβλημα S-L.

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \ , n = 1,2,3,.. \longleftrightarrow X_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \left[B_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \text{ για κανονικοποίηση}\right]$$

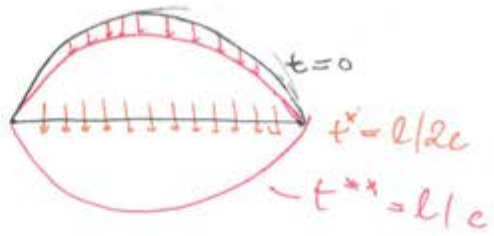
$$T_n''(t) + \underbrace{\lambda_n}_{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2} c^2 T_n(t) = 0 \Rightarrow T_n(t) = C_n \cos\left(\frac{n\pi c t}{l}\right) + D_n \sin\left(\frac{n\pi c t}{l}\right)$$

Συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω: $u_n(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\left[C_n \cos\left(\frac{n\pi c t}{l}\right) + D_n \sin\left(\frac{n\pi c t}{l}\right)\right], n=1,2,..$

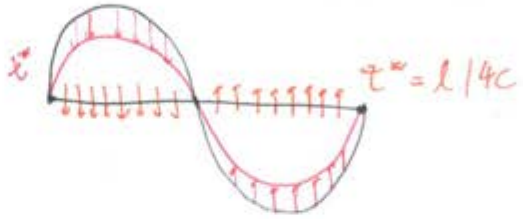
(Τα n πρέπει να 'ναι κοινά - όχι το λ_5 με το λ_8 - αφού πρέπει να ισούται με μια σταθερά)

π.χ. για $D_1=0,\ c_1=1$

$$u_1(x,t)=\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{\pi c t}{l}\right)$$



$$u_2(x,t)=\sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{2\pi c t}{l}\right)$$



<u>Α.Σ.</u>

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\left[C_n\cos\left(\frac{n\pi c t}{l}\right)+D_n\sin\left(\frac{n\pi c t}{l}\right)\right]$$

(ο γραμμικός συνδυασμός λύσεων είναι επίσης λύση λόγω γραμμικότητας στην Δ.Ε.
οι σ.σ. είναι ομογενείς άρα το άθροισμα λύσεων επίσης τις ικανοποιεί)

Έχω ελευθερία στις C_n και D_n. Είναι όμως πλήρης η λύση μας;

<u>ΑΣ1</u> : $u(x,0)=f(x) \Rightarrow f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\quad 0\le x\le l$

Τα C_n μπορούν να προσδιοριστούν με μεταστ. Fourier, αρκεί η f (και η f') νά'ναι συνεχείς τμηματικά.

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

(περιττή επέκταση της f στο $[-l,l]$ - περίοδος $2l$
$C_n=\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$)

<u>ΑΣ2</u> $u_t(x,0)=g(x)\rightarrow g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\frac{n\pi c}{l}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$

$$D_n\frac{n\pi c}{\cancel{l}}=\frac{2}{\cancel{l}}\int_0^l g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx\rightarrow D_n=\frac{2}{n\pi c}\int_0^l g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

επομένως οι D_n, C_n προσδιορίστηκαν.

> Έστω $f(x)=\sin\left(\frac{35\pi x}{l}\right)$, $g(x)=4\sin\left(\frac{8\pi x}{l}\right)$ } "πεπραγμένες" συναρτήσεις

Αν οι Α.Σ. είναι ένα πεπερασμένο άθροισμα ιδιοταλαντώσεων:

$u(x,t)=u_{35}(x,t)+u_8(x,t)\quad(+0u_1+0u_2+\dots)$

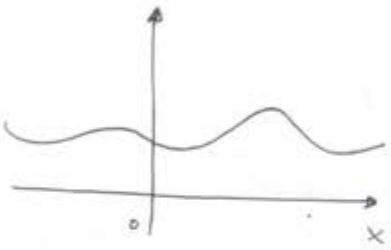
ΑΣ1: $C_{35}\sin\left(\frac{35\pi x}{l}\right)+C_8\sin\left(\frac{8\pi x}{l}\right)=\sin\left(\frac{35\pi x}{l}\right)\Rightarrow \underline{C_{35}=1}$ και $\underline{C_8=0}$

<u>ΑΣ2</u> : $D_{35}=0\quad D_8\frac{8\pi c}{l}=4$

Υπολογίζεται ίσως τους συντελεστές χωρίς ανάλυση Fourier.

$$u(x,t) = \sin\left(\frac{35\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{35\pi c t}{l}\right) + \frac{l}{2\pi c}\sin\left(\frac{8\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{8\pi c t}{l}\right).$$

$\boxed{\text{ΑΠΕΙΡΗ ΧΟΡΔΗ}}$



$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0 \quad , -\infty < x < +\infty, \; t > 0$$

<u>ασυμπτωτικές συνθήκες</u>: $\lim\limits_{|x|\to+\infty} u(x,t) = \lim\limits_{|x|\to+\infty} u_x(x,t) = 0 \;\; \forall\, t>0$

Α.Σ. $u(x,0) = f(x)$

$u_t(x,0) = g(x)$ $\quad -\infty < x < +\infty$

Π.Α.Τ. (δεν υπάρχει σύνορο!)

ΕΠΙΛΥΣΗ <u>ΟΧΙ</u> ΜΕ ΧΩΡΙΣΜΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ!!!

<u>Εύρεση κανονικών μεταβλητών (ανάγωγη εξίσωση στην κανονική μορφή)</u>

Αλλαγή ανεξάρτητων μεταβλητών: $\begin{cases} \xi = x - ct \\ \eta = x + ct \end{cases}$ $\quad u(x,t) = \tilde{u}(\xi,\eta)$

ορίζουσα $J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_t \\ \eta_x & \eta_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -c \\ 1 & c \end{vmatrix} = 2ct \neq 0$

$$u_t = \xi_t \cdot \tilde{u}_\xi + \eta_t \cdot \tilde{u}_\eta = -c\tilde{u}_\xi + c\tilde{u}_\eta$$

$$u_x = \xi_x \cdot \tilde{u}_\xi + \eta_x \cdot \tilde{u}_\eta = \tilde{u}_\xi + \tilde{u}_\eta$$

$$u_{tt} = (-c)(-c\tilde{u}_{\xi\xi} + c\tilde{u}_{\xi\eta}) + c(-c\tilde{u}_{\xi\eta} + c\tilde{u}_{\eta\eta}) = c^2\tilde{u}_{\xi\xi} - 2c^2\tilde{u}_{\xi\eta} + c^2\tilde{u}_{\eta\eta}$$

$$u_{xx} = 1(\tilde{u}_{\xi\xi} + \tilde{u}_{\xi\eta}) + 1(\tilde{u}_{\xi\eta} + \tilde{u}_{\eta\eta}) = \tilde{u}_{\xi\xi} + 2\tilde{u}_{\xi\eta} + \tilde{u}_{\eta\eta} \to c^2 u_{xx} = c^2\tilde{u}_{\xi\xi} + 2c^2\tilde{u}_{\xi\eta} + c^2\tilde{u}_{\eta\eta}$$

Αντικαθιστώντας στην Δ.Ε: $-4c^2\tilde{u}_{\xi\eta} = 0 \Rightarrow \tilde{u}_{\xi\eta} = 0$ ("σφαλτή συνέπεια")

$$\Rightarrow \tilde{u}_\xi(\xi,\eta) = \tilde{F}(\xi) \Rightarrow \boxed{\tilde{u}(\xi,\eta) = F(\xi) + G(\eta)}$$

Επομένως: $\boxed{u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct)}$ [γενική λύση της Δ.Ε.]

<u>αρχικές συνθήκες</u>: i) $u(x,0) = f(x) \Rightarrow F(x) + G(x) = f(x)$ γνωστό $\forall\, x \in \mathbb{R}$

ii) $u_t(x,0) = g(x) \Rightarrow -c\,F'(x) + c\,G'(x) = g(x) \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$

$u_t(x,t) = F'(x-ct)\cdot(-c) + G'(x+ct)\cdot(c)$ / όπου $F'(x-ct) = \dfrac{dF(x-ct)}{\ldots}$

$$\left.\begin{aligned} F(x)+G(x)&=f(x)\\ -cF'(x)+cG'(x)&=g(x)\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} F(x)+G(x)&=f(x)\\ -cF(x)+cG(x)&=\int_0^x g(\lambda)d\lambda+C_1\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} &2cG(x)=cf(x)+\int_0^x g(\lambda)d\lambda+C_1 \Rightarrow G(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2c}\int_0^x g(\lambda)d\lambda+C_1\frac{1}{2c}\\ &\Rightarrow 2cF(x)=cf(x)-\int_0^x g(\lambda)d\lambda-C \Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2c}\int_0^x g(\lambda)d\lambda-C_1\frac{1}{2c}\end{aligned}\right.$$

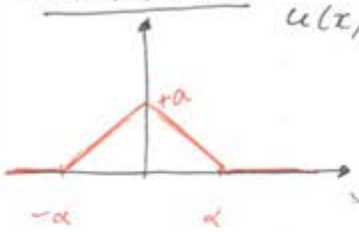
τότε $u(x,t)=\left(\frac{1}{2}f(x-ct)-\frac{1}{2c}\int_0^{x-ct}g(\lambda)d\lambda-\cancel{\frac{C_1}{2c}}\right)+\left(\frac{1}{2}f(x+ct)+\frac{1}{2c}\int_0^{x+ct}g(\lambda)d\lambda+\cancel{\frac{C_1}{2c}}\right)$

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x+ct)+f(x-ct)\right]+\frac{1}{2c}\left\{\int_{x-ct}^{0}g(\lambda)d\lambda+\int_0^{x+ct}g(\lambda)d\lambda\right\}$$

$$\boxed{u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x+ct)+f(x-ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(\lambda)d\lambda}$$

ΤΥΠΟΣ D'ALEMBERT

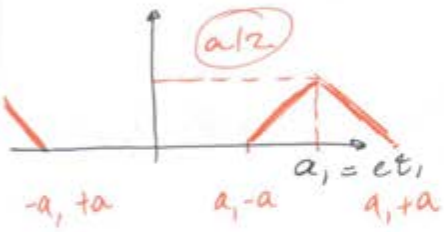
> ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ



$u(x,0)=f(x)$ αρχικό προφίλ χορδής. Ποια θα είναι η εξέλιξή της;

$$u(x,0)=\frac{1}{2}\left[f(x+ct)+f(x-ct)\right]+0=f(x).$$

αφού $u_t(x,0)=g(x)=0$



$$\frac{a_2-a_1}{t_2-t_1}=c$$ (η ταχύτητα με την οποία η αρχική κυματομορφή διαδίδεται στο χώρο· αφού η ενέργεια χωρίστηκε στα δύο)

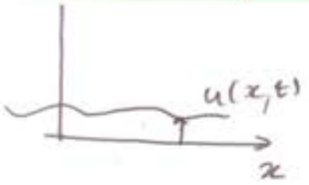
- Αν η διάσταση του χώρου είναι περιττή, το κύμα φτάνει σ'ένα σημείο του χώρου και μετά το προσπερνάει (όπως στο παράδειγμα)
- Αν η διάσταση είναι άρτια, τότε τα κύματα υπερτίθενται - ακόμα και αν εξασθενούν (όπως στην επιφάνεια μιας θάλασσας)

Ευτυχώς ζούμε στον $\mathbb{R}^3$, οπότε τα ηχητικά κύματα φτάνουν στο ηχητικό χώρισμα και φεύγει. Αν ζούσαμε στο $\mathbb{R}^2$, η επικοινωνία δεν θα ήταν ηλεκτρική

Κυματική εξίσωση : $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, $-\infty < x < +\infty$, $t > 0$ (1)

8/5/15

(12)



$$\boxed{\text{Α.Σ.} \begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases} \quad -\infty < x < +\infty}$$

Δείξαμε ότι αλλάζοντας μεταβλητές $\begin{cases} \xi = x + ct \\ \eta = x - ct \end{cases}$ η Δ.Ε. αποκτά την κανονική μορφή $u_{\xi\eta} = 0 \rightsquigarrow u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\,d\xi$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER

$f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ με $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{|x| \to +\infty} f'(x) = 0$

ΟΡΙΣΜΟΣ: $\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx}\,dx$, όπου $\hat{f}(k)$ ο μετασχ. Fourier της f.

Συμβολισμός: $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$

Αποδεικνύεται ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός δίδεται από την

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{ikx}\,dk$$

> αν $\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx}\,dx$ τότε $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{ikx}\,dk$ αλλιώς

δεν θα το χρησιμοποιήσουμε εδώ.

Υπενθύμιση Μετασχηματισμού Laplace

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{+\infty} f(t) \underbrace{e^{-st}}_{\text{πυρήνας}}\,dt, \quad f(t),\ t \in [0, +\infty) \quad (\text{εδώ } s \longleftrightarrow ik)$$

και αν $y'(t) + y(t) = f(t) \xrightarrow[\text{πιν}]{\text{γραμμικό-}} \mathcal{L}\{y'\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{f\}$

$\rightsquigarrow sY(s) - Y(0) + Y(s) = F(s) \rightsquigarrow Y(s) = \frac{y(0) + F(s)}{s+1}$

και $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$

$f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(k)$ Πώς μετασχηματίζονται οι παράγωγοι;

$f'(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} ?$

$$\mathcal{F}[f'] = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-ikx} dx = ik \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx \to \boxed{\mathcal{F}[f'] = ik\,\hat{f}(k)}$$

λαμβάνοντας υπόψιν την συμπεριφορά της f στο $\pm\infty$.

Αντίστοιχα $\boxed{\mathcal{F}[f^{(n)}] = (ik)^n \hat{f}(k)}$

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy \quad \text{συνέλιξη}$$

$$\underline{\underline{\mathcal{F}[f*g]}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, f(x-y) g(y) \right) e^{-ikx} dx \overset{x=y+\lambda}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\, f(\lambda) g(y) e^{-ik(y+\lambda)} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, g(y) e^{-iky} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\, f(\lambda) e^{-ik\lambda} = \underline{\underline{\hat{f}(k)\hat{g}(k)}}$$

$u(x,t)$ συνάρτηση δύο μεταβλητών

$$\hat{u}(k,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{-ikx} dx$$

αντίστροφος $u(x,t) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(k,t) e^{ikx} dk$

<u>ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΑΠΕΙΡΗΣ ΧΟΡΔΗΣ ΜΕ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟ FOURIER</u>

$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0 \rightsquigarrow \mathcal{F}[u_{tt}(x,t)] - c^2 \mathcal{F}[u_{xx}(x,t)] = 0$$

- $\mathcal{F}[u_{tt}(x,t)] = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u_{tt}(x,t) e^{-ikx} dx = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{-ikx} dx = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{u}(k,t) = \hat{u}_{tt}(k,t)$

άρα $\underline{\hat{u}_{tt}(k,t) + c^2 k^2 \hat{u}(k,t) = 0}$ $^{(1)}$ $k \in \mathbb{R},\ t > 0$ } Μετασχηματίζει Μ.Δ.Ε. → Σ.Δ.Ε.

Δεν νιόθω

Α.Σ. $\{\hat{u}(k,0) = \hat{f}(k),\ \hat{u}_t(k,0) = \hat{g}(k)\}$

$u(x,0) = f(x) \rightsquigarrow \mathcal{F}[u(x,0)] = \mathcal{F}[f(x)] \rightsquigarrow \hat{u}(k,0) = \hat{f}(k)$

$u_t(x,0) = g(x) \rightsquigarrow \mathcal{F}[u_t(x,0)] = \mathcal{F}[g(x)] \rightsquigarrow \hat{u}_t(k,0) = \hat{g}(k)$

Λύνουμε την Δ.Ε. (1):

$$\hat{u}(k,t) = A(k)\cos(kct) + B(k)\sin(kct)$$

αν είχαμε A, B = σταθερές θα είχα πάρει μια υποοικογένεια των λύσεων οι A, B δικαιούνται να 'ναι συναρτήσεις ως προς k (παραγωγίζουν ως προς t) και τη βάλλουμε τις συνθήκες:

$$\hat{u}(k,0) = \hat{f}(k) \to A(k)\cdot 1 + 0 = \hat{f}(k) \to A(k) = \hat{f}(k)$$

$$\hat{u}_t(k,0) = \hat{g}(k) \to B(k)\cdot(kc)\cdot 1 - 0 = \hat{g}(k) \to B(k) = \frac{\hat{g}(k)}{kc}$$

Έτσι, $\boxed{\hat{u}(k,t) = \hat{f}(k)\cos(kct) + \frac{\hat{g}(k)}{kc}\sin(kct)}$

αντιστρέφω με τα αντίστοιχα:

$$u(x,t) = \underbrace{\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(k)\cos(kct)\,e^{ikx}\,dk}}_{u_1(x,t)} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{g}(k)\sin(kct)\,dk}}_{u_2(x,t)}$$

$$\cos(kct) = \frac{e^{ikct} + e^{-ikct}}{2} \quad \text{άρα}$$

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(k)\,e^{ik(x+ct)}\,dk + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(k)\,e^{ik(x-ct)}\,dk\right\}$$

άρα $u_1(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right]$

$$\sin(kct) = \frac{e^{ikct} - e^{-ikct}}{2i}$$

επομένως $u_2(x,t) = \frac{1}{2c}\left\{\frac{1}{2\pi}\int^{+\infty}\frac{\hat{g}(k)}{ik}e^{ik(x+ct)}\,dk - \frac{1}{2\pi}\int^{+\infty}\frac{\hat{g}(k)}{ik}e^{ik(x-ct)}\,dk\right.$

$h(x) \xrightarrow{f} \hat{h}(k)$ $\qquad \int_{-\infty}^{x} h(y)\,dy = \phi(x) \to h(x) = \phi'(x)$

$h'(x) \xrightarrow{f} ik\cdot\hat{h}(k)$

$$\downarrow f \qquad \downarrow f$$

$$\hat{h}(k) = ik\hat{\phi}(k)$$

άρα $\boxed{\hat{\phi}(k) = \dfrac{\hat{h}(k)}{ik}}$

άρα $u_2(x,t) = \dfrac{1}{2c}\left\{\int_{-\infty}^{x+ct} g(y)\,dy - \int_{-\infty}^{x-ct} g(y)\,dy\right\} = \dfrac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,dy$

$$u_{tt}^{(2)} - c^2 u_{xx} = \underbrace{F(x,t)}_{\text{διέγερση - μη ομογενής όρος}} \quad (2) \qquad -\infty < x < +\infty,\ t > 0$$

✓ Ασυμπτωτικές Συνθήκες

✓ Αρχικές Συνθήκες $\begin{cases} u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$ ομογενείς για να αναδειχθεί η συμβολή της διέγερσης.

Αν θέλω την (2) με μη ομογενείς, $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$

Fourier στην (2): $f[u_{tt}] - c^2 f[u_{xx}] = f[F(x,t)]$

$\to \hat{u}_{tt}(k,t) + k^2c^2\hat{u}(k,t) = \hat{F}(k,t)$ (το t παραμένει σταθερό)

όπου $\hat{F}(k,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x,t)\,e^{-ikx}\,dx$

με αρχικές $\hat{u}(k,0) = \hat{u}_t(k,0) = 0$

Λύση: $\hat{u}(k,t) = \hat{u}^{ομ}(k,t) + \hat{u}^{ειδ}(k,t)$ με μέθοδο Lagrange (μεταβολής των παραμέτρων)

$= A(k)\cos(kct) + B(k)\sin(kct) + \hat{u}^{ειδ}(k,t)$

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΕΙΔΙΚΗΣ ΛΥΣΗΣ

Lagrange: ψάχνω λύση της μορφής $\hat{u}^{ειδ}(k,t) = A(k,t)\underbrace{\cos(kct)}_{y_1} + B(k,t)\underbrace{\sin kct}_{y_2}$

με αντικατάσταση στις Δ.Ε. $\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{F} \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \cos(kct) & \sin(kct) \\ -kc\sin(kct) & kc\cos(kct) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_t \\ B_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{F}(k,t) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_t(k,t) = \dfrac{1}{kc}\left(-\sin(kct)\hat{F}(k,t)\right) \\ B_t(k,t) = \dfrac{1}{kc}\cos(kct)\hat{F}(k,t) \end{cases}$$

άρα $\hat{u}_{ειδ}(k,t) = \sin(kct)\dfrac{1}{kc}\displaystyle\int_0^t \cos(kc\tau)\hat{F}(k,\tau)d\tau - \cos(kct)\dfrac{1}{kc}\int_0^t \sin(kc\tau)\hat{F}(k,\tau)d\tau$

— το επιλέγω ως αρχικό σημείο, ψάχνω μια ειδική λύση

$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \sin B\cos A$

$$= \frac{1}{kc}\int_0^t \sin[kc(t-\tau)]\hat{F}(k,\tau)d\tau$$

Για να ικανοποιηθούν οι Α.Σ $\hat{u}^{ΓΕΝ}(k,0) = 0 \to A = 0$, $\hat{u}_t^{ΓΕΝ}(k,0) = 0 \to B = 0$

Επομένως $\hat{u}^{ΓΕΝ}(k,t) = \dfrac{1}{kc}\displaystyle\int_0^t \sin[kc(t-\tau)]\hat{F}(k,\tau)d\tau$

και απομένει ο προσδιορισμός της u μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού.

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(k,t)\, e^{ikx}\, dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{k}\right)\left(\int_0^t \sin[kc(t-\tau)]\, \hat{F}(k,\tau)\, d\tau\right) e^{ikx}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,\tau)\, e^{-ikx}\, dx$$

ή

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi,\tau)\, e^{-ik\xi}\, d\xi$$

για να την μπερδεύω

$$\text{άρα} \quad u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\, F(\xi,\tau) \underbrace{\left\{ \frac{1}{2\pi c}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin[kc(t-\tau)]\, e^{ik(x-\xi)}}{k}\, dk \right.}_{K(x-\xi,\, t-\tau)}$$

Συνάρτηση Μεταφοράς

Ανεξάρτητη της διέγερσης

$$K(x-\xi, t-\tau) = \frac{1}{2c}\left\{ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\, \frac{e^{ik[x+c(t-\tau)-\xi]}}{ik} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\, \frac{e^{ik[x-c(t-\tau)-}}{ik} \right.$$

ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΗΣ ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ 15/5/15

15

$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t) \qquad -\infty < x < +\infty$

$t > 0$

Ασυμπτωτικές $u, u_x, u_t \xrightarrow[|x| \to +\infty]{} 0$

Α.Σ. $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$

$$\hat{u}(k,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{-ikx} dx$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(k,t) e^{ikx} dk$$

ή καλύτερα $\hat{u}(k,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi, t) e^{-ik\xi} d\xi$

$$\mathcal{F}[\Delta E] \to \hat{u}_{tt}(k,t) + k^2 \hat{u}(k,t) = \hat{F}(k,t)$$

$$\hat{u}(k,t) = \underbrace{A(k)\cos(kct) + B(k)\sin(kct)}_{\text{ομογενής}} + \underbrace{A(k,t)\cos(kct) + B(k,t)\sin(kct)}_{\text{μη ομογενής - με μέθοδο Lagrange}}$$

⋮ προηγούμενο μάθημα

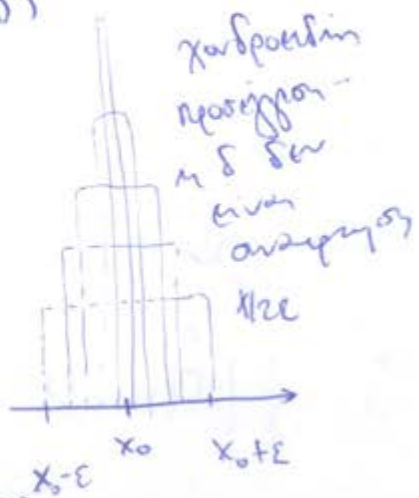
$$\hat{u}(k,t) = \frac{1}{kc} \int_0^t \hat{F}(k,\tau) \sin(kc(t-\tau)) d\tau$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(k,t) e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, e^{ikx} \frac{1}{k} \left(\int_0^t \hat{F}(k,\tau) \sin(kc(t-\tau)) d\tau \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi c} \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, e^{ikx} \frac{1}{k} \int_0^t \left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi,\tau) e^{-ik\xi} d\xi \right) \sin(kc(t-\tau)) d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_0^t d\tau\, F(\xi,\tau) \frac{1}{2\pi c} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{e^{ik(x-\xi)}}{k} \sin(kc(t-\tau)) \right)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_0^t d\tau\, F(\xi,\tau)\, K(\underbrace{x-\xi}_{v}, \underbrace{t-\tau}_{s})$$



Παρένθεση

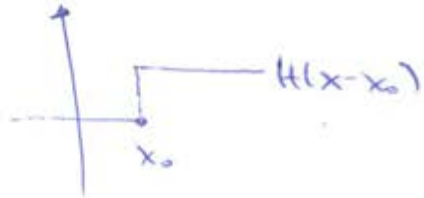
$$\mathcal{F}[\delta(x-x_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0) e^{-ikx} dx = e^{-ikx_0}$$

$$\delta(x-x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-x_0)} dk$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0) dx = 1$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0) f(x) dx = f(x_0)}$$

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(x-x_0)\,dx = H(x-x_0)$$



$\downarrow$

$$H'(x-x_0) = \delta(x-x_0)$$

$$f[H] = \frac{f(\delta)}{ik} \rightsquigarrow f[H(x-x_0)] = \frac{e^{-ikx_0}}{ik} \to H(x-x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik(x-x_0)}}{ik}\,dk$$

$$K(v,s) = \frac{1}{2\pi c}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\, \frac{e^{ikv}}{k}\sin(kcs) = \frac{1}{2\pi c}\,\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\, \frac{e^{ik(v+sc)} - e^{ik(v-sc)}}{ik}$$

$$= \frac{1}{2c}\left(H(v+sc) - H(v-sc)\right) = \frac{1}{2c}\left[H(x-y+c(t-\tau)) - H(x-y-c(t-\tau))\right]$$

$\tau \le t$ άρα το 1ο πρόσημο > 2ο

$x-y-c(t-\tau) < 0 < x-y+c(t-\tau)$ Σε εκφυλισμένο

$\hookrightarrow x-c(t-\tau) < y < x+c(t-\tau)$

Τότε $K(v,s) = \frac{1}{2c}\cdot 1$ (αλλιώς $= 0$)

γιρνάει πίσω $\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2c}\int_0^t d\tau \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} dy\, F(y,\tau)}$ Λύνει το ομογενές πρόβλημα

> Δείχτε ότι η u στην οποία καταλήξαμε ικανοποιεί την Δ.Ε!

$$u_t = \frac{1}{2\cancel{c}}\cancel{c}\int_0^t d\tau\left[F(x+c(t-\tau),\tau) + F(x-c(t-\tau),\tau)\right]$$ (Παραγωγίζω πρώτα το εξωτερικό)

$$u_{tt} = \frac{1}{2}\left[F(x+c\cancel{(t-t)},t) + F(x-c(t-t),t)\right] + \frac{1}{2}\int_0^t d\tau\left(F_x(x+c(t-\tau),\tau) - F_x(x-c(t-\tau),\tau)\right)$$

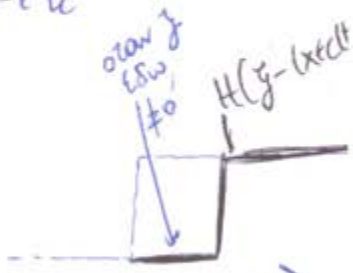
$$u_x = \frac{1}{2c}\int_0^t d\tau\,[F(x+c(t-\tau),\tau) - F(x-c(t-\tau),\tau)]$$

$$u_{xx} = \frac{1}{2c}\int_0^t d\tau\,[F_x(x+c(t-\tau),\tau) - F_x(x-c(t-\tau),\tau)]$$

<u>εκρεμμότητα</u>

$$> H(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik\mu}}{ik}\,dk \qquad H(-\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ik\mu}}{ik}\,dk \overset{k'=-k}{=} \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{e^{ik'\mu}}{-ik'}(-dk') =$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik\mu}}{ik}\,dk \longrightarrow \boxed{H(-\mu) = -H(\mu)}$$



$$(*) = \frac{1}{2c}[H(x+c(t-\tau)-y) - H(x-c(t-\tau)-y)] =$$

$H(y-(x-c(t-\tau)))$

$$= \frac{1}{2c}[H(y-(x-c(t-\tau)) - H(y-(x+c(t-\tau))]$$

<u>ΤΕΝΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ</u>

3

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t)$$

$$u(x,0) = f(x)$$
$$u_t(x,0) = g(x)$$
τώρα έχω και μη ομογενείς ΑΣ

$$u(x,t) = \underbrace{\frac{1}{2c}\int_0^t d\tau \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} dy\, F(y,\tau)}_{\text{Σταθερά}} + \underbrace{\frac{1}{2}[f(x+ct)+f(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,dy}_{\text{Α.Σ.}}$$

ΗΜΙΑΠΕΙΡΗ ΧΟΡΔΗ

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

ΣΣ. $u(0,t) = 0$, $t \geq 0$ (4)

Α.Σ. $\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$ $x \geq 0$

Ασυμπτωτικές για $x \to +\infty$.

Ο Fourier εδώ δεν κάνει χωρίς ανάλυση $x \in (-\infty, +\infty)$

ΗΜΙΤΟΝΙΚΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER

$$\hat{u}_s(k,t) = \int_0^{+\infty} u(x,t)\sin(kx)\,dx \rightsquigarrow u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \hat{u}_s(k,t)\sin(kx)\,dk$$

Σειρές Fourier $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$, $b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(y)\sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right)dy$

τότε $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l}\left(\int_0^l f(y)\sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right)dy\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \overset{\text{θα κάνω}}{=}$

$$= \frac{2}{l}\int_0^l dy\, f(y) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

οπως το $\int_a^b g(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} g(x_i)(x_{i+1} - x_i)$,

αντιστοιχα $k_n = \frac{n\pi}{l}$, $\underbrace{k_{n+1} - k_n}_{l} = \frac{\pi}{l}$

τότε $f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{l}\underbrace{\left(\int_0^l f(y)\sin(k_n y)\,dy\right)}_{\downarrow\, l \to +\infty,\ n \to +\infty} \sin(k_n x)$

$k = \lim_{\substack{n \to +\infty \\ l \to +\infty}} \frac{n\pi}{l}$

$$\int_0^{+\infty} f(y)\sin(ky)\,dy = \hat{f}(k)$$

$$= \frac{2}{\pi}\int dk\, \hat{f}(k)\sin(kx).$$

Άρα ο μετασχηματισμός : $f(x) \longrightarrow \hat{f}(k) = \int_0^{+\infty} f(x)\sin(kx)\,dx$

$$\hat{f}(k) \longrightarrow f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \hat{f}(k)\sin(kx)\,dk$$

Επιστρέφοντας

$$f_s(u_{tt} - c^2 u_{xx}) = 0 \Rightarrow \int_0^{+\infty} u_{tt}(x,t)\sin(kx)\,dx - c^2\int_0^{+\infty} u_{xx}(x,t)\sin(kx)\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \hat{u}_{tt}(k,t) - c^2 u_x(x,t)\sin(kx)\Big|_0^{+\infty} + c^2 k\int_0^{+\infty} u_x(x,t)\cos(kx)\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \hat{u}_{tt}(k,t) + c^2 \cancel{u_x(0,t)\sin(k\cdot 0)} + c^2 k\, u(x,t)\cos(kx)\Big|_0^{+\infty} + c^2k^2\int_0^{+\infty} u(x,t)\sin(kx)\,dx = 0$$

$\Downarrow$

μη αφήνω κάποιους όρους ανάλογα το $\cos(kx)$

$$\Rightarrow \hat{u}_{tt}(k,t) - c^2 k\, \cancel{u(0,t)}\cos(k\cdot 0) + c^2k^2\,\hat{u}(k,t) = 0$$

0 από Σ.Σ.

$$\Rightarrow \underline{\hat{u}^{(s)}_{tt}(k,t) + c^2k^2\,\hat{u}^{(s)}(k,t) = 0}$$

$$\hookrightarrow \underline{\hat{u}^{(s)}(k,t) = A(k)\cos(kct) + B(k)\sin(kct)}$$

$$\left.\begin{array}{l} u(x,0) = f(x) \rightarrow f_s[u(x,0)] = f_s[f(x)] \rightarrow \hat{u}(k,0) = \hat{f}(k) \\ u_t(x,0) = g(x) \rightarrow \dots \quad \hat{u}_t(k,0) = \hat{g}(k) \end{array}\right\} \text{Α.Σ.}$$

$\vdots$

$$\hat{u}^{(s)}(k,t) = \hat{f}^{(s)}(k)\cos(kct) + \frac{\hat{g}^{(s)}(k)}{kc}\sin(kct)$$

ΗΜΙ-ΑΠΕΙΡΗ ΠΑΚΤΩΜΕΝΗ ΧΟΡΔΗ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ) 22/5/15

(18)

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad , x \in \mathbb{R}^+ \quad , t > 0$$

Σ.Σ. $u(0,t) = 0 \quad , t \geq 0$

Αρ.Σ.

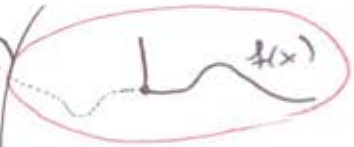
Α.Σ. $u(x,0) = f(x)$

$u_t(x,0) = g(x)$

Μετασχηματισμός Fourier:

$$f_s[u(x,t)] = \int_0^{+\infty} u(x,t) \sin(kx)\,dx = \hat{u}(k,t)$$

$$u(x,t) = f_s^{-1}(\hat{u}(k,t)) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \hat{u}(k,t) \sin kx\,dk$$



$f_n(x)$

περιττή επέκταση της f

ομοίως και για την g

Επίλυση: $f[u_{tt} - c^2 u_{xx}] = f[0] \xrightarrow{\text{δείξατε}} \hat{u}_{tt}(k,t) + c^2 k^2 \hat{u}(k,t) = 0$

$$\hookrightarrow \underset{\Gamma\Lambda}{\hat{u}(k,t)} = A(k)\cos(kct) + B(k)\sin(kct) \quad (*)$$

Α.Σ. $u(x,0) = f(x) \xrightarrow{f_s} \underline{\hat{u}(k,0) = \hat{f}(k)}$ (2a)

$u_t(x,0) = g(x) \xrightarrow{f_s} \int u_t(x,0)\sin(kx)\,dx = \hat{g}(k) \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}\text{ βρίσκω παρ/γω}} \underline{\hat{u}_t(k,0) = \hat{g}(k)}$ (2b)

(1),(2a): $A(k)\cdot 1 + B(k)\cdot 0 = \hat{f}(k) \rightarrow \boxed{A(k) = \hat{f}(k)}$

(1),(2b): $A(k)\cdot 0 + kc\,B(k)\cdot 1 = \hat{g}(k) \rightarrow \boxed{B(k) = \frac{\hat{g}(k)}{ck}}$

Επιστρέφοντας στην (*)

$$\hat{u}(k,t) = \hat{f}(k)\cos(kct) + \frac{\hat{g}(k)}{kc}\sin(kct)$$

$$\hookrightarrow u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \hat{u}(k,t)\sin kx\,dk = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \hat{f}(k)\cos(kct)\sin(kx)\,dk +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\hat{g}(k)}{k}\sin(kct)\sin kx\,dk$$

$$\Rightarrow u(x,t) = u^{(1)}(x,t) + u^{(2)}(x,t)$$

$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$

$2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$

$$u^{(1)}(x,t) = \frac{1}{2}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\hat{f}(k)\sin[k(x+ct)]dk + \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\hat{f}(k)\sin[k(x-ct)]dk\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{f(x+ct) + \underline{\underline{f(x-ct)}}\right\}$$

τι γίνεται όταν $x-ct<0$

(η f ορίζεται για $x>0$)

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\hat{f}(k)\sin[k(x-ct)]dk = \begin{cases} f(x-ct), & x>ct \\ -f(ct-x), & x<ct \end{cases} = \underline{\underline{f_\pi(x-ct)}}$$

άρα $u^{(1)}(x,t) = \frac{1}{2}\left\{f(x+ct) + f_\pi(x-ct)\right\}$

$$u^{(2)}(x,t) = \frac{1}{2c}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\hat{g}(k)}{k}\cos[k(x-ct)]dk - \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\hat{g}(k)}{k}\cos[k(x+ct)]dk\right\}$$

<u>Παρένθεση</u> $g(\xi) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\hat{g}(k)\sin(k\xi)dk \Rightarrow \underline{\int_0^x g(\xi)d\xi = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\hat{g}(k)\frac{1}{k}(1-\cos kx)dk}$

άρα $u^{(2)}(x,t) = \frac{1}{2c}\left\{-\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\hat{g}(k)}{k}(1-\cos k(x-ct))dk + \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\hat{g}(k)}{k}(1-\cos k(x+ct))dk\right\}$

$$= \frac{1}{2c}\left\{\dots + \int_0^{x+ct} g(\xi)d\xi\right.$$

περίπτωση: εδώ όμως έχω cos έτσι δεν θα αλλάξει κάτι

επομένως $\int_0^{+\infty}\frac{\hat{g}(k)}{k}(1-\cos k(x-ct))dk = \int_0^{|x-ct|} g(\xi)d\xi$

άρα $u^{(2)}(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{|x-ct|}^{x+ct} g(\xi)d\xi \rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f_\pi(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{|x-ct|}^{x+ct} g(\xi)d\xi$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}\left\{f_\pi(x+ct) + f_\pi(x-ct)\right\} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g_\pi(\xi)d\xi$$

δε χρειάζεται – αλλά τώρα

<u>ΙΔΙΟ</u> αποτέλεσμα με απέραντη χορδή αν κάνω περιττή επέκταση (εδώ κρατάμε $x>0$)

$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad , x>0, t>0$

5

ΣΣ $\quad u_x(0,t) = 0 \quad t \geq 0$

τώρα η χορδή οριζόντια - δεν είναι παντοτινή - και τώρα η εφαπτομένη μηδενίζεται

Αρ.Σ.

ΑΣ $\quad \left.\begin{array}{l} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{array}\right\} x \geq 0$

<u>Συμμετρικός Μετασχηματισμός</u>

$$\hat{u}(k,t) = f_c[u(x,t)] = \int_0^{+\infty} u(x,t)\cos(kx)\,dx$$

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \hat{u}(k,t)\cos kx\,dk$$

<u>Δε</u> : $f_c[\Delta E] = 0 \rightarrow f_c[u_{tt}] - f_c[c^2 u_{xx}] = 0$

$$\hat{u}_{tt}(k,t) - c^2\int_0^{+\infty} u_{xx}(x,t)\cos(kx)\,dx = 0$$

$$\hat{u}_{tt}(k,t) - c^2\cancel{\left[u_x(x,t)\cos(kx)\right]}\Big|_0^{+\infty} + c^2\int u_x(x,t)(-k\sin kx)\,dx = 0$$

$$u_x(x,t) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

$$u_x(0,t) = 0$$

$$\hat{u}_{tt}(k,t) - c^2 k\cancel{u(x,t)\sin kx}\Big|_0^{+\infty} + c^2\int_0^{+\infty} u(x,t)k^2\cos kx\,dx = 0$$

$$u(x,t) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

$\sin kx|_{x=0} = 0$ ΜΕ ΣΟΖΕΙ!

$$\hat{u}_{tt}(k,t) + c^2k^2\hat{u}(k,t) = 0 \rightarrow \underline{\hat{u}(k,t) = A(k)\cos kct + B(k)\sin kct}$$

<u>Α.Σ.</u> $\quad u(x,0) = f(x) \rightarrow \hat{u}(k,0) = \hat{f}(k)$

$\quad u_t(x,0) = g(x) \rightarrow \hat{u}_t(k,0) = \hat{g}(k)$

$\hat{u}_t(k,0) = \hat{g}(k) \quad \sin kct$

$$u(x,t) = \underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \hat{f}(k)\cos kct \cdot \cos kx\, dk}_{u^{(1)}(x,t)} + \underbrace{\frac{2}{\pi c}\int_0^{+\infty} \frac{\hat{g}(k)}{k} \sin kct \cdot \cos kx\, dk}_{u^{(2)}(x,t)}$$

$2\sin A\cos B = \sin(A+B) - \sin(B-A)$

$2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$

$$u^{(1)}(x,t) = \frac{1}{2}\left\{ \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \hat{f}(k)\cos(k(x+ct))\,dk + \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \hat{f}(k)\cos(k(x-ct))\,dk \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ f_\alpha(x+ct) + f_\alpha(x-ct) \right\}$$

— πεπλεγμένη λύση με D'Alembert

$$u^{(2)}(x,t) = \frac{1}{2c}\left\{ \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\hat{g}(k)}{k}\sin(k(x+ct))\,dk - \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\hat{g}(k)}{k}\sin(k(x-ct))\,dk \right\}$$

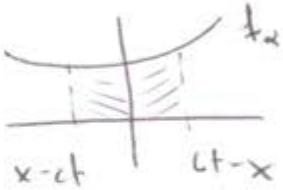
Παρατήρηση $\quad g(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \hat{g}(k)\cos(ky)\,dk \to \int_0^x g(y)\,dy = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\hat{g}(k)}{k}\sin(kx)\,dk$

$$\text{άρα } u^{(2)}(x,t) = \frac{1}{2c}\left\{ \int_0^{x+ct} g(y)\,dy - \underbrace{\int_0^{x-ct} g(y)\,dy}_{\text{αν } x>ct} \right\}$$

αν $x-ct<0$ τότε αντίθετα πράγματα

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\hat{g}(k)}{k}\sin(k\underbrace{(x-ct)}_{<0})\,dk = -\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\hat{g}(k)}{k}\sin(k(ct-x))\,dk =$$

$$= -\int_0^{|x-ct|} g(y)\,dy = -\int_0^{ct-x} g(y)\,dy = -\int_{x-ct}^{0} g_\alpha(y)\,dy$$



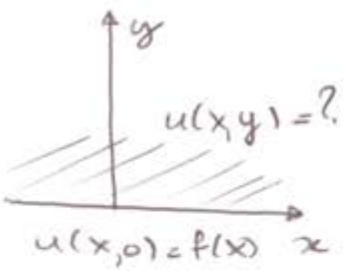
$$\text{άρα } u^{(2)}(x,t) = \frac{1}{2c}\left\{ \int_0^{x+ct} g_\alpha(y)\,dy + \int_{x-ct}^{0} g_\alpha(y)\,dy \right\} = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g_\alpha(y)\,dy$$

Αραιδιο πρόβλημα με άπειρη χορδή στο $g \to g_\alpha$ και χρησιμοποιώ μόνο το $(0,+\infty)$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER (... συνέχεια)

29/5/15

(20)



$\Delta u(x,y) = 0 \quad x \in \mathbb{R} \quad y > 0$ (ανάλογο χωρίο – αλλιώς εφαρμόζω χωρισμό μεταβλητών)

$u(x,0) = f(x)$

όλες οι απαραίτητες συνοριακές συνθήκες για $x \to \pm\infty$, $y \to \infty$ θεωρούνται ισχύουσες.

ΜΕΤ. FOURIER

$$\hat{u}(k,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,y)\, e^{-ikx}\, dx$$

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(k,y)\, e^{ikx}\, dk$$

$\mathcal{F}[\Delta E]$: $\mathcal{F}[u_{xx} + u_{yy}] = 0$

$$\rightsquigarrow \int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}(x,y)\, e^{-ikx}\, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} u_{yy}(x,y)\, e^{-ikx}\, dx = 0$$

όμως $\int_{-\infty}^{+\infty} u_{yy}(x,y)\, e^{-ikx}\, dx = \hat{u}_{yy}(k,y)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}(x,y)\, e^{-ikx}\, dx = \underbrace{\cancel{u_x(x,y)\, e^{-ikx}\Big|_{-\infty}^{+\infty}}}_{\text{συνοριακές}} + ik \int_{-\infty}^{+\infty} u_x(x,y)\, e^{-ikx}\, dx =$$

$$= \underbrace{\cancel{ik\, u(x,y)\, e^{-ikx}\Big|_{-\infty}^{+\infty}}}_{\text{συνοριακές}} - k^2 \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,y)\, e^{-ikx}\, dx$$

άρα $\underline{\hat{u}_{yy}(k,y) - k^2 \hat{u}(k,y) = 0} \rightsquigarrow \boxed{\hat{u}(k,y) = C(k)\, e^{ky} + D(k)\, e^{-ky}}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Θέλω $\hat{u}(k,y) \xrightarrow[k \to \pm\infty]{} 0$ προκειμένου να υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα για να ισχύσει ότι η λύση που ψάχνω στο $y > 0$ πρέπει

$$\hat{u}(k,y) = \begin{cases} C(k)\, e^{ky}, & k < 0 \\ D(k)\, e^{-ky}, & k > 0 \end{cases} \longrightarrow \boxed{\hat{u}(k,y) = A(k)\, e^{-|k|y}} \quad (1)$$

$\rightsquigarrow$ Δεν αρκεί ο ένας όρος να είναι μεγαλύτερος από τον άλλο, δηλ. αν π.χ. $k > 0$ να είναι $D(k) > C(k)$ γιατί και τότε το $C(k)\, e^{ky}$ θα τείνει ανεξέλεγκτα στο άπειρο για $y \to \pm\infty$. Ίσως αν $C = C(k,y)$ τότε κάτι θα γίνεται.

$\mathcal{F}[\Sigma\Sigma] \rightsquigarrow \mathcal{F}[u(x,0)] = \mathcal{F}[f(x)] \longrightarrow \underline{\hat{u}(k,0) = \hat{f}(k)} \quad (2)$

από (1), (2) συνάγουμε ότι $A(k)\, e^{-|k| \cdot 0} = \hat{f}(k) \longrightarrow \underline{A(k) = \hat{f}(k)}$

δηλαδή $\boxed{\hat{u}(k,y) = \hat{f}(k)\, e^{-|k|y}}$

Αντιστρέφοντας $u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)\, e^{-|k|y}\, e^{ikx}\, dk \quad (3)$

οπου $\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-ik\xi} d\xi$

άρα $u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-ik\xi} d\xi \right) e^{-|k|y} e^{ikx} dk =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, f(\xi) \underbrace{\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|k|y} e^{ik(x-\xi)} dk \right]}_{K(x-\xi,\, y)}$$

$$K(x-\xi, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{0} e^{k(y+i(x-\xi))} dk + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{+\infty} e^{-k(y-i(x-\xi))} dk$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{y+i(x-\xi)} (1-0) - \frac{1}{2\pi} \frac{1}{y-i(x-\xi)} (0-1) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{y}{y^2+(x-\xi)^2} \equiv K(x-\xi, y)$$

άρα $\boxed{u(x,y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^2+y^2} d\xi}$ ΤΥΠΟΣ POISSON

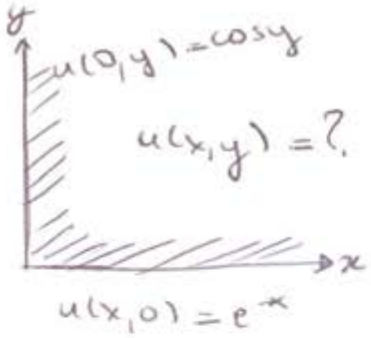
$\lim_{y\to 0} u(x,y) = 0 \cdot \underbrace{(\text{κατω})}_{\text{απειρο}} \neq 0$ (απροσδιοριστία) γιατι $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^2} d\xi$ μη φραγμενο στο $x=\xi$

αναμενεται $\lim_{y\to 0} u(x,y) = f(x)$

θα πρεπει φυσικα $\lim_{y\to 0} \frac{y}{\pi} \frac{1}{(x-\xi)^2+y^2} = \delta(x-\xi)$ προκειμενου ετσι να δωσει το $f(x)$

• για $x \neq \xi$ παιρνουμε $\lim_{y\to 0} \frac{y}{\pi} \frac{1}{(x-\xi)^2+y^2} = 0$

• για $x = \xi$ πρεπει να δειξω οτι $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{\pi} \frac{1}{(x-\xi)^2+y^2} d\xi = 1$ ✓



Έχω συνθήκες Dirichlet → ημιτονικός Fourier

$$\Delta u(x,y) = 0 \qquad x \in (0,+\infty),\ y \in (0,+\infty)$$

$$u(x,0) = e^{-x} \quad \forall\ x \in [0,+\infty)$$

$$u(0,y) = \cos y \quad \forall\ y \in [0,+\infty)$$

$$\int_0^{+\infty} u_{xx}(x,y)\sin kx\,dx + \int_0^{+\infty} u_{yy}(x,y)\sin kx\,dx = 0$$

ΗΜΙΤΟΝΙΚΟΣ FOURIER

$$\hat{u}(k,y) = \int_0^{+\infty} u(x,y)\sin kx\,dx$$

$$u(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \hat{u}(k,y)\sin kx\,dk$$

ομως $\int_0^{+\infty} u_{yy}(x,y)\sin kx\,dx = \hat{u}_{yy}(k,y)$

$$\int_0^{+\infty} u_{xx}(x,y)\sin kx\,dx = \cancel{u_x(x,y)\sin kx\Big|_0^{+\infty}} - k\int_0^{+\infty} u_x(x,y)\cos kx\,dx =$$

$$= -k\,u(x,y)\cos kx\Big|_0^{+\infty} - k^2\int_0^{+\infty} u(x,y)\sin kx\,dx =$$

$$= k\,u(0,y) - k^2\,\hat{u}(k,y)$$

άρα $\boxed{\hat{u}_{yy}(k,y) - k^2\hat{u}(k,y) = -k\cos y}$ Μη ομογενής Δ.Ε. (1)

$f_s[\Sigma\Sigma 1]$: $u(x,0) = e^{-x} \to \underline{\hat{u}(k,0)} = \int_0^{+\infty} e^{-x}\sin kx\,dx = \underline{\frac{k}{k^2+1}}$ (2)

Laplace

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\sin(at)\,dt = \frac{a}{s^2+a^2}$$

$s=1$, $t=x$, $a=k$ $\quad \mathcal{L}(\sin at) = \frac{a}{s^2+a^2}$

$$\hat{u}(k,y) = A(k)e^{-ky} + \cancel{B(k)e^{ky}} + \hat{u}_{\epsilon\iota\delta}(k,y)$$

Εδώ $x>0$ άρα $k>0$ επομένως το e^{ky} απορρίπτεται

Υπολογίζω λύση της μη ομογενούς με μέθοδο προσδιορισμένων συντελεστών:

$\hat{u}_{\epsilon\iota\delta}(k,y) = C(k)\cos y \qquad \hat{u}_{y\epsilon\iota\delta}(k,y) = -C(k)\sin y \qquad \hat{u}_{yy}(k,y) = -C(k)\cos y$

αντικαθιστώ στην (1): $-C(k)\cancel{\cos y} - k^2C(k)\cancel{\cos y} = -k\cancel{\cos y}$

$\Rightarrow C(k) + k^2C(k) = k \to \underline{C(k) = \frac{k}{k^2+1}}$

Γενική λύση: $\hat{u}(k,y) = A(k)e^{-ky} + \frac{k}{k^2+1}\cos y$ (1')

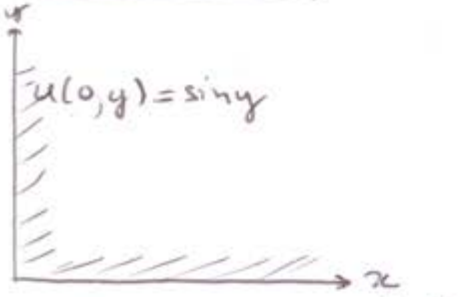
$(1'),(2)$: $A(k)e^{-0} + \cancel{\frac{k}{k^2+1}\cos 0} = \cancel{\frac{k}{k^2+1}} \to A(k)=0$

άρα $\underline{\hat{u}(k,y) = \frac{k}{k^2+1}\cos y}$

$$u(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{k}{k^2+1}\cos y \sin kx\,dk = \frac{2}{\pi}\cos y\int_0^{+\infty}\frac{k}{k^2+1}\sin kx\,dk =$$

$$= \cos y\, f_s^{-1}\left(\frac{k}{k^2+1}\right) \to \underline{u(x,y) = e^{-x}\cos y}$$

ΝΕΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ



$$\Delta u(x,y) = 0, \quad x,y \in (0,+\infty)$$

$$u(x,0) = \sin x \quad x\in[0,+\infty)$$

$$u(0,y) = \sin y \quad y\in[0,+\infty)$$

$$\dots\ \hat{u}_{yy}(k,y) - k^2\hat{u}(k,y) = -k\sin y$$

$$\hat{u}(k,y) = A(k)e^{-ky} + \frac{k}{k^2+1}\sin y \quad (*')$$

ΣΣ1 : $\hat{u}(k,0) = \hat{f}(k)$ (2) $\left(\hat{f}(k) = f_s(\sin x)\right.$ αλλά το αφήνω ως γενική περίπτωση$\left.\right)$

Συνδυάζοντας : $A(k)e^{-0} + 0 = \hat{f}(k) \to \underline{A(k) = \hat{f}(k)}$

τότε $\hat{u}(k,y) = \hat{f}(k)e^{-ky} + \frac{k}{k^2+1}\sin y$

$$\text{άρα } u(x,y) = \underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\hat{f}(k)e^{-ky}\sin kx\,dk}_{u^{(1)}(x,y)} + \underbrace{\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{+\infty}\frac{k}{k^2+1}\sin kx\,dk\right)\sin y}_{u_2(x,y)}$$

$$u^{(1)}(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f(\xi)\sin k\xi\, d\xi\right) e^{-ky}\sin kx\, dk =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int d\xi\, f(\xi) \int_0^{+\infty} e^{-ky}\underbrace{\sin kx \sin k\xi}_{\frac{1}{2}[\cos k(x-\xi) - \cos k(x+\xi)]}\, dk =$$

Laplace

$$\int_0^{+\infty} e^{-ky}\cos(k(x-\xi))\,dk = \frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}$$

$$= \frac{y}{\pi}\int_0^{+\infty} d\xi\, f(\xi)\left[\frac{1}{(x-\xi)^2+y^2} - \frac{1}{(x+\xi)^2+y^2}\right] =$$

$$= \frac{y}{\pi}\int_0^{+\infty} d\xi\, f_\pi(\xi)\frac{1}{(x-\xi)^2+y^2} - \frac{y}{\pi}\int_0^{-\infty} f(-\xi)\frac{1}{(x-\xi)^2+y^2}\, d(-\xi)$$

$$\rightsquigarrow \boxed{u^{(1)}(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_\pi(\xi)\,d\xi}{(x-\xi)^2+y^2}}$$

ολοϊδία με Poisson με περίοδο επεκτάσεις της f

$$u^{(2)}(x,y) = e^{-x}\sin y$$

Στην ειδική περίπτωση οπου $f(x) = \sin x$

$$u(x,y) = \underbrace{\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\xi\, d\xi}{(x-\xi)^2+y^2}}_{\text{με μεταβολή ολοκλήρωση}} + e^{-x}\sin y = e^{-y}\sin x + e^{-x}\sin y \quad (\text{Συμμετρία})$$

$$\hat{u}(k,y) = A(k)e^{-ky} + \frac{k}{k^2+1}\sin y$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\hat{f}(k)\sin kx\, dk =$$

$$= \int_0^{+\infty} d\xi\, f(\xi)\underbrace{\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin kx \sin k\xi\, dk\right)}_{\delta(x-\xi)\ \text{αναγνωσμα}} \quad (*)$$

$$\hat{u}(k,0) = f_s(\sin x)$$

$$A(k) = f_s(\sin x) = \int_0^{+\infty}\sin x \sin kx\, dx = \frac{\pi}{2}\delta(k-1)$$

επιβεβαιωνει οι τιμες αναπτυγματος (*)

$$\hat{u}(k,y) = \frac{\pi}{2}\delta(k-1)e^{-ky} + \frac{k}{k^2+1}\sin y$$

$$u(x,y) = \frac{2}{\cancel{\pi}}\frac{\cancel{\pi}}{2}\int_0^{+\infty}\delta(k-1)\,e^{-ky}\sin kx\,dk + \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{k}{k^2+1}\sin y\,\sin kx\,dk =$$

$$= e^{-y}\sin x + e^{-x}\sin y \quad //$$

ΕΞΙΣΩΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

5/6/2015

23

1) $\uparrow u(x,t)$ θερμοκρασία $\quad u_t = u_{xx}\ ,\ -\infty < x < +\infty\ ,\ t>0$

$\xrightarrow{\quad x \quad}$ ασυμπτωτικές συνθήκες για $|x| \to +\infty$

Α.Σ. $u(x,0) = f(x)\ ,\ -\infty < x < +\infty$

$$\hat{u}(k,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{-ikx} dx, \quad u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(k,t) e^{ikx} dk$$

$$f[u_t] = f[u_{xx}] \rightsquigarrow \int_{-\infty}^{+\infty} u_t(x,t) e^{-ikx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}(x,t) e^{-ikx} dx$$

$$\rightsquigarrow \hat{u}_t(k,t) = +ik \int_{-\infty}^{+\infty} u_x(x,t) e^{-ikx} dx = +(ik)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{-ikx} dx$$

$$\rightsquigarrow \underline{\hat{u}_t(k,t) + k^2 \hat{u}(k,t) = 0} \overset{\text{λύση}}{\rightsquigarrow} \underline{\hat{u}(k,t) = A(k) e^{-k^2 t}} \quad (1)$$

$$u(x,0) = f(x) \rightsquigarrow f[u(x,0)] = f[f(x)] \rightsquigarrow \hat{u}(k,0) = \hat{f}(k) \quad (2)$$

Συνδυάζοντας: $A(k) e^0 = \hat{f}(k) \rightsquigarrow A(k) = \hat{f}(k) \rightsquigarrow \boxed{\hat{u}(k,t) = \hat{f}(k) e^{-k^2 t}}$

Αντίστροφος μετασχηματισμός: $u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(k,t) e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{-k^2 t} e^{ikx} dk \quad (3)$

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-ik\xi} d\xi \quad (4)$$

$$(3),(4) \rightsquigarrow u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-ik\xi} d\xi \right) e^{-k^2 t} e^{ikx} dk =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, f(\xi) \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2 t} e^{ik(x-\xi)} dk \right)}_{K(x-\xi,\,t)}$$

ολοκληρώνω τετραγώνου για gaussian

$$K(\lambda, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2 t} e^{ik\lambda} dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\left(k^2 - 2\frac{ik\lambda}{t}\right)} dk =$$

μπορώ να μετατ. το ολοκλήρωμα παράλληλα στο Re k

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\left[k^2 - 2\frac{i\lambda k}{2t} + \left(\frac{i\lambda}{2t}\right)^2 - \left(\frac{i\lambda}{2t}\right)^2\right]} dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\left(k - \frac{i\lambda}{2t}\right)^2} \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{4t^2}} dk$$

$\uparrow \mathrm{Im}\, k$

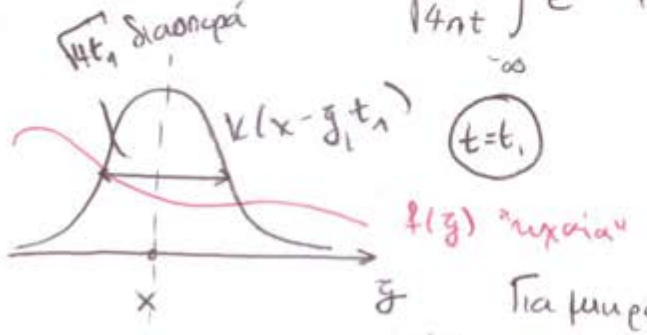
$$= e^{-\frac{\lambda^2}{4t}} \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\left(k - \frac{i\lambda}{2t}\right)^2} d\left(k - \frac{i\lambda}{2t}\right) = e^{-\lambda^2/4t} \int^{+\infty} e^{-tk^2}$$

Gaussian $I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx^2}dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ty^2}dy = \iint e^{-t(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{+\infty} \rho d\rho\, e^{-t\rho^2} =$

$\overset{\xi=\rho^2}{=} \frac{2\pi}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t\xi} d\xi = \pi\left(-\frac{1}{t}e^{-t\xi}\Big|_0^{+\infty}\right) = \frac{\pi}{t}\left(\cancel{e^{-\infty}} - e^0\right) = \frac{\pi}{t} = I^2 \rightsquigarrow I = \sqrt{\frac{\pi}{t}}$

άρα $k(\lambda, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\lambda^2/4t} \rightsquigarrow k(x-\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}}$ Heat Kernel

Επιστρέφοντας $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} f(\xi) d\xi$



Βασική ιδέα στο ολοκλήρωμα έχει το διάστημα κοντά στο x, ανάλογα με τη διασπορά $\sigma = \sigma(t)$

Για μικρούς t, η $e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}}$ τείνει στη δ Dirac.

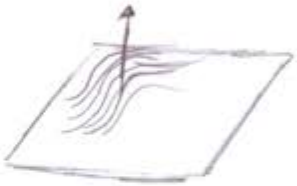
$u(x,t) \xrightarrow[t\to 0]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-\xi) f(\xi) d\xi = f(x)$ ✓

ΕΞΙΣΩΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΣΕ ΠΛΑΚΑ

$u_t = u_{xx} + u_{yy}$ $\quad -\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$, $t > 0$

Αναμενόμενες συνθήκες για $|x| \to +\infty$, $|y| \to +\infty$ μηδενικές

Α.Σ. $u(x,y,0) = f(x,y)$ $\quad -\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$



Μαθηματική Παρένθεση Bessel

$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ Bessel (0 μη ομαλό)

$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ... $r = 0$ διπλή ρίζα της διάκρισης

Για $n = 0$ $\quad J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$ καλούμε σχετικά

$Y_0(x)$ λίγο άχρηστη, λογαριθμική ανηκεστόφρα, δε θα τη χρησιμοποιήσουμε

Διπλός Μετασχηματισμός Fourier

$$\underbrace{\hat{f}(k_1,k_2)}_{\hat{u}(k_1,k_2,t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \underbrace{f(x,y)}_{\hat{u}(x,y,t)}\, e^{-ik_1x} \cdot e^{-ik_2y}, \quad \underbrace{f(x,y)}_{u(x,y,t)} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty} dk_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1\, \underbrace{\hat{f}(k_1,k_2)}_{\hat{u}(k_1,k_2,t)}\, e^{ik_1x} e^{ik_2y}$$

$$f[u_t] = f[u_{xx}+u_{yy}] \rightsquigarrow \hat{u}_t(k_1,k_2,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,dy\,(u_{xx}+u_{yy})\, e^{-i(k_1x+k_2y)} =$$

$$= -k_1^2 \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,y)\, e^{-i(k_1x+k_2y)}\, dx\,dy - k_2^2 \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,y)\, e^{-i(k_1x+k_2y)}\, dx\,dy =$$

$$= -k^2 \hat{u}(k_1,k_2,t) \quad \text{όπου} \quad (k_1,k_2) = k(\cos\phi_k, \sin\phi_k)$$

$$\hat{u}_t(k_1,k_2,t) + k^2 \hat{u}(k_1,k_2,t) = 0 \rightsquigarrow \underline{\hat{u}(k_1,k_2,t) = A(k_1,k_2)\, e^{-k^2t}} \quad (1).$$

<u>Α.Σ</u> $\quad f[u(x,y,0)] = f[f(x,y)] \rightsquigarrow \underline{\hat{u}(k_1,k_2,0) = \hat{f}(k_1,k_2)} \quad (2)$

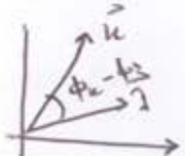
$$(1),(2) \rightsquigarrow \boxed{\hat{u}(k_1,k_2,t) = \hat{f}(k_1,k_2)\, e^{-k^2t}}$$

$$u(x,y,t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dk_1\,dk_2\, \hat{f}(k_1,k_2)\, e^{-k^2t} \cdot e^{i(k_1x+k_2y)}, \quad k^2 = k_1^2+k_2^2$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dk_1\,dk_2 \left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_1\,d\xi_2\, f(\xi_1,\xi_2)\, e^{-i(\xi_1k_1+\xi_2k_2)}\right] e^{-k^2t}\, e^{i(k_1x+k_2y)} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_1\,d\xi_2\, f(\xi_1,\xi_2)\, \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dk_1\,dk_2\, e^{-k^2t}\, e^{i[k_1(x-\xi_1)+k_2(y-\xi_2)]}}_{K(x-\xi_1,\,y-\xi_2,\,t)}$$

$$K(\lambda_1,\lambda_2,t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dk_1\,dk_2\, e^{-k^2t}\, e^{i(k_1\lambda_1+k_2\lambda_2)} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{+\infty} k\,dk\, e^{-k^2t}\int_0^{2\pi} d\phi_k\, e^{ik\lambda\cos(\phi_k-\phi_\lambda)}$$



$$\vec{k}\cdot\vec{\lambda} = k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 = k\lambda\cos(\phi_k-\phi_\lambda)$$

ϕ_λ σταθερή κλπ.

$$\overset{\text{αλλαγ. μεταβ.}}{=} \frac{1}{(2\pi)} \int_0^{+\infty} k\,dk\, e^{-k^2 t} \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} d\phi\, e^{ik\lambda\cos\phi} \frac{1}{2\pi} \right)}_{J_0(k\lambda)\ \text{ισχυρίζομαι}}$$

$J_0(0)=1$, αφού $\int_0^{2\pi} d\phi\, e^{i\cdot 0\cdot\cos\phi} \frac{1}{2\pi} = 1$

και αφού ν.δ.ο. ικανοποιεί την Bessel! ✓

$k^2=\mu$

$k\,dk = \frac{1}{2} d\mu$

$$K(\lambda_1,\lambda_2,t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dk\cdot k\, e^{-k^2 t} J_0(k\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \frac{\lambda^{2n}}{2^{2n}} \int_0^\infty dk\, e^{-k^2 t} k^{2n+1} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \frac{\lambda^{2n}}{2^{2n}} \int_0^\infty d\mu\, e^{-\overset{s}{\cancel{\mu}}\overset{t}{t}} \mu^n \overset{\mathcal{L}(t^n)=\frac{n!}{s^{n+1}}}{=} \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \frac{\lambda^{2n}}{2^{2n}} \frac{\cancel{n!}}{t^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{4\pi t}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{\lambda^2}{2^2 t}\right)^n = \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{\lambda^2}{4t}}$$

άρα $K(x-\xi_1, y-\xi_2, t) = \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{(x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2}{4t}}$ Heat kernel για 2D

$$u(x,y,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_1 d\xi_2\, f(\xi_1,\xi_2) \underbrace{\frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{|\underline{x}-\underline{\xi}|^2}{4t}}}_{\underbrace{\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi_1)^2}{4t}}}_{\xrightarrow{t\to 0}\ \delta(x-\xi_1)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(y-\xi_2)^2}{4t}}}_{\xrightarrow{t\to 0}\ \delta(y-\xi_2)}}$$

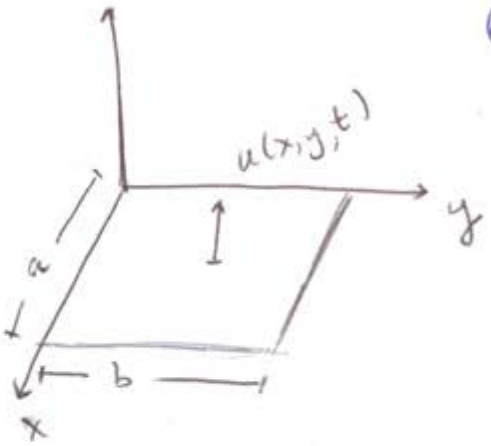
2D Dirac.

ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΑ ΚΥΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ/ΑΠΤΟ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

12/6/2015

25

Π.Α.Σ.Τ.



ΔΕ $u_{tt} = c^2 \Delta u$ $\quad 0<x<a,\ 0<y<b,\ t>0$

Σ.Σ. $u(0,y,t) = u(a,y,t) = 0 \quad \begin{cases} t \geq 0 \\ 0 \leq y \leq b \end{cases}$

$u(x,0,t) = u(x,b,t) = 0 \quad \begin{cases} t \geq 0 \\ 0 \leq x \leq a \end{cases}$

Α.Σ. $\left.\begin{array}{l} u(x,y,0) = f(x,y) \\ u_t(x,y,0) = g(x,y) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b \end{array}$

χωρισμός μεταβλητών $u(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t)$ (1)

αντικαθιστώντας ΔΕ και διαιρώ με u

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{1}{c^2} u_{tt} \rightsquigarrow \underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)}}_{(x,y)} = \frac{1}{c^2} \underbrace{\frac{T''(t)}{T(t)}}_{t} = -\mu \quad \text{Σ.Χ.Μ.①}$$

$$T''(t) + c^2 \mu T(t) = 0$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \mu = -\lambda \quad \text{Σ.Χ.Μ.②}$$

$$\left.\begin{array}{ll} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & x \in (0,a) \\ Y''(y) + \overbrace{(\mu - \lambda)}^{\nu} Y(y) = 0, & y \in (0,b) \\ T''(t) + c^2 \mu T(t) = 0, & t > 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} X(0) = X(a) = 0 \quad \text{I} \\ Y(0) = Y(b) = 0 \quad \text{II} \\ \text{III} \end{array}$$

Αντικαθιστώντας στην 1 οριακές Σ.Σ: $u(0,y,t) = 0 \overset{\forall y,t}{\rightsquigarrow} X(0)Y(y)\cdot T(t) = 0 \rightsquigarrow \boxed{X(0) = 0}$

$u(a,y,t) = 0 \rightsquigarrow \boxed{X(a) = 0}$, $u(x,0,t) = 0 \rightsquigarrow \boxed{Y(0) = 0}$, $u(x,b,t) = 0 \rightsquigarrow \boxed{Y(b) = 0}$

> Το πρόβλημα (I) έχει τις λύσεις ιδιοτιμές $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$ και αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις $X_n(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$

> Το πρόβλημα (II) έχει τις λύσεις ιδιοτιμές $\nu_m = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$ και αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις $Y_m(y) = B_m \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$

Επομένως $\mu - \lambda_1 = \nu_m \rightsquigarrow \mu_{nm} = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \equiv \frac{\omega_{nm}^2}{c^2}$

σφιστός

Το πρόβλημα (III) γίνεται $T''_{nm}(t) + \mu_{nm} c^2 T_{nm}(t) = 0$

$\rightsquigarrow T''_{nm}(t) + \omega_{nm}^2 T(t) = 0 \rightsquigarrow T_{nm}(t) = C_{nm}\cos\omega_{nm}t + D_{nm}\sin\omega_{nm}t$

$$u_{nm}(x,y,t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\left[C_{nm}\cos\omega_{nm}t + D_{nm}\sin\omega_{nm}t\right], \quad n,m = 1,2,\ldots$$

ιδιοσυχνότητες της μεμβράνης.

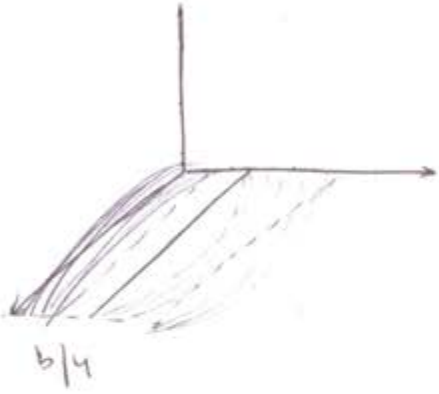
$$\omega_{nm} = c\pi\sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2}$$

$$u_{11}(x,y,t) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}\right)\cos\omega_n t \quad \left(\begin{matrix} C_{11} = 1 \\ D_{11} = 0 \end{matrix} \text{ για το παράδειγμα}\right)$$

$\omega_{11} t_1 = \frac{\pi}{2}$

$\omega_{11} t_2 = \pi$

$T_{11} = \frac{2\pi}{\omega_{11}}$, $\omega_{11} = c\pi\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$



$\omega_{12} t_1^* = \frac{\pi}{2}$ $T_{12} = \frac{2\pi}{\omega_{12}}$

γραμμικότητα
ομογενείς
ομογενείς
μηδενικές Σ.Σ.

$$u(x,y,t) = \sum_{n,m} u_{nm}(x,y,t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\left[C_{nm}\cos\omega_{nm}t + D_{nm}\sin\omega_{nm}t\right]$$

<u>Αρχικές Συνθήκες</u>

me likes γιατί είναι διπλός Fourier

$$u(x,y,0) = f(x,y) \rightsquigarrow \sum_{n,m=1}^{\infty} C_{nm}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) = f(x,y)$$

τα C_{nm} προσδιορίζονται : $C_{nm} = \frac{4}{a\cdot b}\int_0^a dx \int_0^b dy\, f(x,y)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$

$u_t(x,y,0)=g(x,y)$ ... $D_{nm}\omega_{nm}=\frac{4}{a\cdot b}\int_0^a dx\int_0^b dy\, g(x,y)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$

→ Έστω ότι μας έχουν δοθεί: $f(x,y)=3\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{8\pi y}{b}\right)$

$g(x,y)=5\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{4\pi y}{b}\right)$

Εδώ πρακτικά δε χρειάζεται Fourier:

$u(x,y,t)=u_{18}(x,y,t)+u_{14}(x,y,t)\ (+0u_{11}+0u_{12}+\dots)$

ΑΣ.1: $c_{18}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{8\pi y}{b}\right)+c_{14}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{4\pi y}{b}\right)=3\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{8\pi y}{b}\right)$

άρα $c_{18}=3$, $c_{14}=0$

ΑΣ.2 $D_{18}\omega_{18}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{8\pi y}{b}\right)+D_{14}\omega_{14}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{4\pi y}{b}\right)=5\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{4\pi y}{b}\right)$

$D_{18}=0$ και $D_{14}=\frac{5}{\omega_{14}}$

τελική λύση $u(x,y,t)=\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{8\pi y}{b}\right)[3\cos(\omega_{18}t)+0\sin(\omega_{18}t)]$

$+\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{4\pi y}{b}\right)\left[0\cos(\omega_{14}t)+\frac{5}{\omega_{14}}\sin(\omega_{14}t)\right]$

Μόνο όταν και οι $\frac{\sin}{0}$ είναι ένα ωραίο πεπερασμένο αθροίσμα αποφεύγω Fourier

ΠΑΛΑΝΤΩΣΗ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΜΕΜΒΡΑΝΗΣ

$u_{tt}=c^2\Delta u$, $0\le\rho<a$, $\varphi\in[0,2\pi)$, $t>0$

ΣΣ $u(a,\varphi,t)=0$, $\varphi\in[0,2\pi)$, $t\ge0$

ΑΣ $u(\rho,\varphi,0)=f(\rho,\varphi)$ $\quad 0\le\rho\le a$

$u_t(\rho,\varphi,0)=g(\rho,\varphi)$ $\quad \varphi\in[0,2\pi)$

Χωρισμός μεταβλητών: $u(\rho,\varphi,t)=R(\rho)F(\varphi)T(t)$ (1)

Αντικαθιστώντας στη: $\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right](RF)\Big]T=\frac{1}{c^2}RFT''$

$$\left[R''(\rho)F(\varphi)+\frac{1}{\rho}R'(\rho)F(\varphi)+\frac{1}{\rho^2}R(\rho)F''(\varphi)\right]T(t)=\frac{1}{c^2}R(\rho)F(\varphi)T''(t)$$

$$\underbrace{\frac{R''(\rho)}{R(\rho)}+\frac{1}{\rho}\frac{R'(\rho)}{R(\rho)}+\frac{1}{\rho^2}\frac{F''(\varphi)}{F(\varphi)}}_{(\rho,\varphi)}=\underbrace{\frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)}}_{t}=-\lambda$$

$$T''(t)+\lambda c^2 T(t)=0.$$

$$\rho^2\frac{R''(\rho)}{R(\rho)}+\rho\frac{R'(\rho)}{R(\rho)}+\lambda\rho^2=-\frac{F''(\varphi)}{F(\varphi)}=k$$

$F''(\varphi)+kF(\varphi)=0,\ \varphi\in[0,2\pi)$. (I)

$\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)+(\lambda\rho^2-k)R(\rho)=0,\ 0\le\rho\le\alpha$ (II)

$\rightsquigarrow$ αναζητώ 2π-περιοδικότητα για το φ : $F(\varphi+2\pi)=F(\varphi)$

i) $k<0$ απορρίπτεται

ii) $k=0$ $\quad F''(\varphi)=0 \rightsquigarrow F(\varphi)=A\varphi+B$

$F(\varphi+2\pi)=F(\varphi) \rightsquigarrow A(\varphi+2\pi)+B=A\varphi+B$

$A=0$, B αυθαίρετο

$F(\varphi)=B$ 1 περιοδική <u>και</u> με $T=2\pi$.

iii) $k=\mu^2$, $F''(\varphi)+\mu^2F(\varphi)=0 \rightsquigarrow F(\varphi)=A\sin\mu\varphi+B\cos\mu\varphi$

2π-περιοδική αν $\mu_n=n\in\mathbb{N}$

άρα $k_n=n^2$, $n=1,2,\ldots$ $\quad F_n(\varphi)=A_n\sin(n\varphi)+B_n\cos(n\varphi)$, $n=0,1,\ldots$

Επιστρέφοντας στο n υπάρχει και η τιμή 0, ενσωματωμένη και στο ii)

<u>Πρόβλημα II</u> : $\rho^2R_n''(\rho)+\rho R_n'(\rho)+(\lambda\rho^2-n^2)R_n(\rho)=0$ Bessel

$x=\sqrt{\lambda}\rho$

$R_n(\rho)=C_nJ_n(\sqrt{\lambda}\rho)+D_nY_n(\sqrt{\lambda}\rho)$ ← me no likes

άρα $R_n(\rho)=C_nJ_n(\sqrt{\lambda}\rho)$

$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0$

$J_n(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^n\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{(n+l)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2l}$

$Y_n(x)=J_n(x)\ln x+$ (εκφράσεις δυνάμεων)

λογαριθμική, κακή λύση

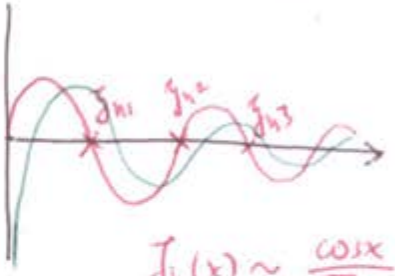
ΣΣ

$u(a,\varphi,t)=0 \rightsquigarrow R(a)=0$ άρα $C_n J_n(\sqrt{\lambda}\, a)=0 \rightsquigarrow \sqrt{\lambda}\, a=\xi_{nl}$

$$\boxed{\lambda_{nl}=\frac{\xi_{nl}^2}{a^2}}$$

άρα η Δt για το T γίνεται

$$T''(t)+\lambda c^2 T(t)=0 \rightsquigarrow T''_{nl}(t)+\left(\frac{\xi_{nl}c}{a}\right)^2 T_{nl}(t)=0$$



$$J_n(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

τελική λύση

$$u_{nl}(\rho,\varphi,t)=J_n\left(\frac{\xi_{nl}}{a}\rho\right)\left[A_n\sin n\varphi+B_n\cos n\varphi\right]\left[C_n\cos\left(\frac{\xi_{nl}ct}{a}\right)+D_n\sin\left(\frac{\xi_{nl}ct}{a}\right)\right]$$

$n=0,1,2,\dots$

$l=1,2,\dots$ με $\lambda_{nl}=\frac{\xi_{nl}^2}{a^2}$

$$u_{01}(\rho,\varphi,t)=u_{01}(\rho,t)=J_0\left(\frac{\xi_{01}}{a}\rho\right)\left[C_0\cos\left(\frac{\xi_{01}ct}{a}\right)+D_0\sin\left(\frac{\xi_{01}ct}{a}\right)\right]$$

$C_0=1,\ D_0=0$

$\frac{\xi_{01}}{a}t_1=\frac{\pi}{2}$

$$u_{12}\left(\rho,\frac{\pi}{2},0\right)=J_1\left(\frac{\xi_{12}\rho}{a}\right)\left[A_1\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cancel{B_1\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right]\left[1\cos\left(\frac{\xi_{12}tc}{a}\right)+0\right]$$

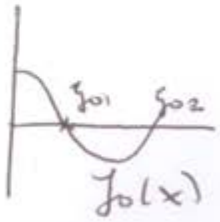
$\varphi=\frac{\pi}{2}$

$\rho_1=\frac{\xi_{11}}{\xi_{12}}a$

μόνιμος κόμβος δύο κατέρες

$\rho_1=\frac{\xi_{01}}{\xi_{02}}a$

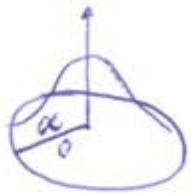
$$u_{02}(\rho,t)=J_0\left(\frac{\xi_{02}}{a}\rho\right)\left[C_{20}''\cos\left(\frac{\xi_{02}ct}{a}\right)+0\right]$$



.. Ταλάντωση κυκλικής μεμβράνης (συνέχεια)

19/6/15

(28)



$u(\rho,t)$ → λύση ανεξάρτητης του φ.

✓ $u_{tt} = c^2 \Delta u, \quad 0 \le \rho < a, \quad t > 0$

✓ $u(a,t) = 0 \quad t \ge 0$

✓ $\left.\begin{array}{l} u(\rho,0) = f(\rho) \\ u_t(\rho,0) = g(\rho) \end{array}\right\} \; 0 \le \rho \le a$

$u(\rho,T) = R(\rho)T(t)$

$$\Delta E \longrightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{R}\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dR}{d\rho}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda$$

$$\cdot \; \frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \lambda R = 0 \quad (1) \qquad \cdot \; T''(t) + \lambda c^2 T(t) = 0 \quad (2)$$

$(1) \rightsquigarrow \rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) + \lambda \rho^2 R(\rho) = 0$ (Bessel τάξης 0)

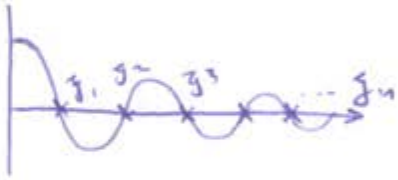
$x^2 y'' + x y' + (x^2 - m^2) y = 0$ Bessel m - τάξης

αν $s = \sqrt{\lambda}\rho \rightsquigarrow s^2 \ddot{R} + s\dot{R} + s^2 R = 0 \rightsquigarrow R(s) = J_0(s)$ μόνο (όχι Neumann)

$R(\rho) = J_0(\sqrt{\lambda}\rho) \quad (3)$

Σ.Σ. $u(a,t) = 0 \rightsquigarrow R(a) = 0 \overset{(3)}{\rightsquigarrow} J_0(\sqrt{\lambda}a) = 0$

$\rightsquigarrow \boxed{\sqrt{\lambda}a = \xi_n, \quad n = 1, 2, \ldots}$ διακρονοάνομη του φάσματος



$$\boxed{\lambda_n = \frac{\xi_n^2}{a^2}}$$

Πάμε στη (ΔΕ) 2: $T_n''(t) + \left(\frac{\xi_n c}{a}\right)^2 T_n(t) = 0 \rightsquigarrow T_n(t) = C_n \cos\left(\frac{\xi_n c t}{a}\right) + D_n \sin\left(\frac{\xi_n c t}{a}\right)$

και $R_n(\rho) = J_0\left(\frac{\xi_n}{a}\rho\right)$

τελικά: $u_n(\rho,t) = J_0\left(\frac{\xi_n}{a}\rho\right)\left[C_n \cos\left(\frac{\xi_n c t}{a}\right) + D_n \sin\left(\frac{\xi_n c t}{a}\right)\right], \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\rho,t)$ υπαρξιφία λύση

<u>ΑΣ1</u> $u(\rho,0) = f(\rho) \rightsquigarrow f(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0\left(\frac{\xi_n}{a}\rho\right)$ (5) $(0 \le \rho \le a)$

<u>ΑΣ2</u> $u_t(\rho,0) = g(\rho) \rightsquigarrow g(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n c}{a} D_n J_0\left(\frac{\xi_n \rho}{a}\right)$ $(0 \le \rho \le a)$ (6)

Προσδιορίζονται πάντα οι C_n, D_n ⇒
Είναι οι J_0 πλήρες ορθογώνιο σύνολο συναρτήσεων Yes!

$\rho J_0''\left(\frac{\xi_n \rho}{a}\right) + \rho J_0'\left(\frac{\xi_n \rho}{a}\right) + \frac{\xi_n^2}{a^2} J_0\left(\frac{\xi_n \rho}{a}\right) = 0$ Θ.δ.ο. είναι Sturm-Liouville.

$-\left(\rho J_0'\left(\frac{\xi_n \rho}{a}\right)\right)' = \frac{\xi_n^2}{a^2} \rho J_0\left(\frac{\xi_n \rho}{a}\right)$ <u>μη</u> κανονικό S-L γιατί η συνάρτηση βάρους μηδενίζεται

$P(\rho) = \rho$ λ_n $r(\rho) = \rho$ συνάρτηση βάρους

$J_0\left(\frac{\xi_n \rho}{a}\right)\Big|_{\rho=a} = 0$ Από Θ. Sturm-Liouville (ίσως για το μη κανονικό πρόβλημα) προκύπτει ότι οι συναρτήσεις $J_0\left(\frac{\xi_n \rho}{a}\right)$ σχηματίζουν ένα πλήρες ορθογώνιο σύνολο με συνάρτηση βάρους $r(\rho) = \rho$.

Μια μόνο συνθήκη η δεύτερη αντικαθίσταται από το $P(\rho)$ στο 0.

$$\int_0^a J_0\left(\frac{\xi_n \rho}{a}\right) J_0\left(\frac{\xi_m \rho}{a}\right) \rho\, d\rho \overset{n \ne m}{=} 0$$

$$\int_0^a J_0^2\left(\frac{\xi_n \rho}{a}\right) \rho\, d\rho \overset{\text{με χρησιμοποιούμενες σύνοψη}}{=} \frac{a^2}{2}\left(J_0'(\xi_n)\right)^2$$

$$\int_0^a J_0\left(\frac{\xi_n \rho}{a}\right) J_0\left(\frac{\xi_m \rho}{a}\right) \rho\, d\rho = \overbrace{\frac{a^2}{2}\left(J_0'(\xi_n)\right)^2}^{N_n} \delta_{nm}$$

$$(5): \int_0^a f(\rho) J_0\left(\frac{\xi_m \rho}{a}\right) \rho\, d\rho = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \underbrace{\int_0^a J_0\left(\frac{\xi_n \rho}{a}\right) J_0\left(\frac{\xi_m \rho}{a}\right) \rho\, d\rho}_{N_m \delta_{nm}}$$

$$\rightsquigarrow \boxed{C_n = \frac{1}{N_m} \int_0^a f(\rho) J_0\left(\frac{\xi_m \rho}{a}\right) \rho\, d\rho}$$

(6) $\rightsquigarrow \frac{c}{a} z_m D_m = \frac{1}{N_m} \int_0^a g(\rho) J_0\left(\frac{z_m \rho}{a}\right) \rho \, d\rho \quad , m=1,2,\dots$

$$f(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0\left(\frac{z_n \rho}{a}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{N_n} \int_0^a f(\rho') J_0\left(\frac{z_n \rho'}{a}\right) \rho' d\rho' \right) J_0\left(\frac{z_n \rho}{a}\right) =$$

$$= \int_0^a d\rho' \cdot \rho' \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} J_0\left(\frac{z_n \rho'}{a}\right) J_0\left(\frac{z_n \rho}{a}\right) \cdot \frac{1}{N_n} \right)}_{\delta(\rho-\rho')} f(\rho')$$

$\delta(\rho-\rho')$ → μόνη συνάρτηση που δεν εξαρτάται νόημα!

$$\left(f(x) = \int \delta(x'-x) f(x') dx' \right)$$

άρα $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{z_n \rho'}{a}\right) J_0\left(\frac{z_n \rho}{a}\right)}{N_n} = \frac{\delta(\rho-\rho')}{\rho'} = \frac{\delta(\rho-\rho')}{\rho}$$ (αφού $\delta(\rho-\rho') \neq 0$ μόνο αν $\rho=\rho'$)

$u_{tt} - c^2 \Delta u(x,y,t) = h(x,y,t)$

"Ασυμπτωτικές Συνθήκες" για $|x|, |y| \to \infty$

$$\begin{cases} u(x,y,0) = f(x,y) \\ u_t(x,y,0) = g(x,y) \end{cases}$$

Θα γενικεύσουμε με αυθαίρετα δεδομένα h, f, g και κάποια στιγμή θα υποθέσουμε

$h(x,y,t) = h(\rho,t)$

$f(x,y) = f(\rho) \quad , g(x,y) = g(\rho)$

Δπλός Μετασχηματισμός Fourier: $\hat{u}(k_1,k_2,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \, u(x,y,t) e^{-i(k_1 x + k_2 y)}$

$$u(x,y,t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dk_2 \, \hat{u}(k_1,k_2,t) \, e^{i(k_1 x + k_2 y)}$$

$\underline{k} = (k_1, k_2) \quad , \vec{r} = (x,y)$

μπορώνα κοιτάξω και $\hat{u}(k_1,k_2,t) = \frac{1}{2\pi} \dots$

$k = |k| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$

$u(x,y,t) =$

$$\hat{u}(\underline{k},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}dy\, u(\vec{r},t)e^{-i\underline{\vec{k}}\cdot\vec{r}} \quad , \quad u(\vec{r},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dk_1\int_{-\infty}^{+\infty}dk_2\,\hat{u}(\vec{k},t)e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

Ζευγάρι Διάδοχι μετ. Fourier που θα χρησιμοποιήσουμε εδώ

$$f(\Delta E) \rightarrow f[u_{tt}] - c^2 f[\Delta u] = f[h] \rightsquigarrow \hat{u}_{tt}(\vec{k},t) - c^2\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}dy\,(u_{xx}+u_{yy})e^{-i\vec{k}\vec{r}} = \hat{h}(\vec{k},t)$$

$$\rightsquigarrow \hat{u}_{tt}(\vec{k},t) + c^2\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}dy\,u(x,y,t)\underbrace{(k_1^2+k_2^2)}_{k^2}e^{-i\vec{k}\vec{r}} = \hat{h}(\vec{k},t)$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\hat{u}_{tt} + k^2c^2\hat{u} = \hat{h}} \quad \left(\rightsquigarrow \hat{u}_{tt}(\vec{k},t) + k^2c^2u(\vec{k},t) = \hat{h}(\vec{k},t)\right)$$

$$f(A\Sigma 1) \rightsquigarrow f[u(x,y,0)] = f[f(x,y)] \rightsquigarrow \underline{\hat{u}(\vec{k},0) = \hat{f}(\vec{k})}$$

$$f(A\Sigma 2) \rightsquigarrow f[u_t(\vec{r},0)] = f[g(\vec{r})] \rightsquigarrow \underline{\hat{u}_t(\vec{k},0) = \hat{g}(\vec{k})}$$

<u>Λύση της Δ.Ε.</u> (μη ομογενής)

$$\hat{u}(\vec{k},t) = \hat{u}_{\text{ομ}}(\vec{k},t) + \hat{u}_{\text{ειδ}}(\vec{k},t) =$$

$$= A(\vec{k})\cos(kct) + B(\vec{k})\sin(kct) + \hat{u}_{\text{ειδ}}(\vec{k},t)$$

Μέθοδος Lagrange για τη μη ομογενή

$$\hat{u}^{\text{ειδ}}(\vec{k},t) = A(\vec{k},t)\cos(kct) + B(\vec{k},t)\sin(kct)$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix}\cos(kct) & \sin(kct)\\ -kc\sin(kct) & kc\cos(kct)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_t\\ B_t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ \hat{h}\end{bmatrix} \rightsquigarrow A_t = \frac{\begin{vmatrix}0 & \sin(kct)\\ \hat{h} & \dots\end{vmatrix}}{kc} = \frac{-\sin(kct)\,\hat{h}(\vec{k},t)}{kc}$$

ορίζουσα του πίνακα συντελεστών

$$B_t = \frac{\begin{vmatrix}\cos(kct) & 0\\ \vdots & \hat{h}\end{vmatrix}}{kc} = \frac{\cos(kct)}{kc}\hat{h}(\vec{k},t)$$

άρα $A = -\frac{1}{kc}\int_0^t \sin(kct')\,\hat{h}(\vec{k},t')\,dt'$, $B = \frac{1}{kc}\int_0^t \cos(kct')\,\hat{h}(\vec{k},t')\,dt'$

Επομένως $\hat{u}_{\text{ειδ}}(\vec{k},t) = \frac{1}{kc}\left[\sin(kct)\int_0^t \cos(kct')\hat{h}(\vec{k},t')dt' - \cos(kct)\int_0^t \sin(kct')\hat{h}(\vec{k},t')dt'\right]$

$= \frac{1}{kc}\int_0^t \sin[kc(t-t')]\hat{h}(\vec{k},t')dt'$ η λύση της συνήθους μη ομογενούς διαφορικής

Είναι η εξής:

$$\hat{u}(\vec{k},t) = A(\vec{k})\cos(kct) + B(\vec{k})\sin(kct) + \frac{1}{kc}\int_0^t \sin[kc(t-t')]\hat{h}(\vec{k},t')dt'$$

αντικαθιστώντας στις αρχικές $A(\vec{k}) = f(\vec{k})$.

$$B(\vec{k}) = \frac{g(\vec{k})}{kc}$$

τελικά $\hat{u}(\vec{k},t) = \hat{f}(\vec{k})\cos(kct) + \frac{\hat{g}(\vec{k})}{kc}\sin(kct) + \frac{1}{kc}\int_0^t \sin kc(t-t')\hat{h}(\vec{k},t')dt'$

$$\hat{u}(\vec{r},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} d\vec{k}\,\hat{f}(\vec{k})\cos(kct)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} d\vec{k}\,\frac{\hat{g}(\vec{k})}{kc}\sin(kct)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$+\frac{1}{c}\int_0^t\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} d\vec{k}\sin(kc(t-t'))\hat{h}(\vec{k},t')e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right\}dt'$$

Έστω $f(x,y) = f(\vec{r}) = f(\rho)$, $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$

$g(x,y) = g(\vec{r}) = g(\rho)$

$h(x,y,t) = h(\vec{r},t) = h(\rho,t)$

$$\hat{f}(\vec{k}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} d\vec{k}\,f(\vec{r})e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \rho d\rho\int_0^{2\pi} d\varphi\, f(\rho)e^{-ik\rho\cos(\overbrace{\varphi-\varphi_k}^{\vartheta})} =$$

φ_k σταθ.

$$= \int_0^\infty d\rho\cdot\rho f(\rho)\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\vartheta\, e^{-ik\rho\cos\vartheta}}_{=J_0(k\rho)}$$

άρα $\hat{f}(\vec{k}) = \int_0^\infty d\rho\cdot\rho f(\rho)J_0(k\rho) = \hat{f}(k)$

ομοίως,... $\hat{g}(\vec{k}) = \int_0^\infty d\rho \cdot \rho\, g(\rho)\, J_0(k\rho) = \hat{g}(k)$

$\hat{h}(k,t) = \int_0^\infty d\rho \cdot \rho\, h(\rho,t)\, J_0(k\rho)$ μετασχηματισμός Hankel

Μια επιβεβαίωση αν βάλω $t=0$

$$u(\vec{r},0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} d\vec{k}\, \hat{f}(\vec{k})\, 1\cdot e^{i\vec{k}\vec{r}} = \int_0^\infty k\,dk\, \hat{f}(k)\, \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi_k\, e^{ik\rho\cos(\overbrace{\varphi-\varphi_k}^{\theta})}$$

$\rightsquigarrow f(\rho) = \int_0^{+\infty} k\,dk\, \hat{f}(k)\, J_0(k\rho)$ ← απαιτείται

(ενώ και αντίστροφος τύπος είναι ίδιοι)

$$f(\rho) = \int_0^{+\infty} k\,dk \left(\int_0^{+\infty} \rho'\,d\rho'\, f(\rho')\, J_0(k\rho')\right) J_0(k\rho) = \int_0^{+\infty} d\rho'\, f(\rho') \underbrace{\left\{\rho' \int_0^{+\infty} J_0(k\rho')\, J_0(k\rho)\, k\,dk\right\}}_{\delta(\rho-\rho')}$$

$$\int_0^{+\infty} J_0(k\rho')\, J_0(k\rho)\, k\,dk = \frac{\delta(\rho-\rho')}{\rho}$$

μετονομάζοντας στο άπειρο πρόγ. άθροισμα $\frac{\xi_n}{a} \equiv k_n$

$$\frac{\xi_{n+1}}{a} - \frac{\xi_n}{a} = k_{n+1} - k_n = \Delta k_n$$

$\Delta k_n \xrightarrow[a\to\infty]{} dk$ άρα το πρόγραμμα ο άπειρο άθροισμα

θα γίνει το ολοκλήρωμα.

Έτσι η σχέση γίνεται η συνεχιοποίηση του πεπερασμένου αθροίσματος.