ΣΕΜΦΕ 3ο Εξάμηνο - Φεβρουάριος 2015

Ανάλυση ΙΙΙ

Ονοματεπώνυμο .

ΘΕΜΑΤΑ

Θ1. Α) Να υπολογιστεί η μάζα του στερεού που φράσσεται από τις επιφάνειες $x^2 + y^2 = 2y$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ και έχει συνάρτηση πυκνότητας $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$. (1.5μ)

Β) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τμήματος της επιφάνειας του κώνου $z^2 = x^2 + y^2$ που αποκόπτεται από τον κύλινδρο $x^2 + (y - 1)^2 = 1$. (1μ)

Θ2. Α) Δίνεται το ολοκλήρωμα

$$\iint_D \cos\left(\frac{x - 2y}{x + y}\right) dxdy,$$

όπου D το χωρίο που περικλείεται από τους άξονες Ox, Oy και την ευθεία $x+y = 1$. Θεωρώντας τον μετασχηματισμό $u = x + y$, $v = x - 2y$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα. (1.5μ)

Β) Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_C (y^3 - \frac{y}{x^2 + y^2})\, dx + (x^3 + \frac{x}{x^2 + y^2})\, dy,$$

όπου C είναι η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια κύκλου με εξίσωση $x^2 + y^2 = 7$. (1μ)

Θ3. Επαληθεύστε το θεώρημα του Gauss για την επιφάνεια $x^2+y^2+z^2 = 4$ και το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x, y, z) = (1, 2, z^3)$. (2.5μ)

Θ4. i) Θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x, y, z) = (-x^2, y^2, 2xz - 2yz + x + 1)$. Δείξτε ότι είναι σωληνοειδές. (0.5μ)

ii) Βρείτε μια διανυσματική συνάρτηση $\vec{G}(x, y, z)$, κλάσης C^1 στο $\mathbb{R}^3$, τέτοια ώστε

$$\text{rot}\vec{G}(x, y, z) = \vec{F}(x, y, z),\ \forall\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

(1μ)

iii) Με αναγωγή σε κατάλληλο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα, υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\iint_S \vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{n}(x, y, z)\, d\sigma,$$

όπου S είναι το τμήμα της επιφάνειας του παραβολοειδούς $z = x^2 + y^2$ για το οποίο $z \leq 4$ και $\vec{n}(x, y, z)$ είναι το εξωτερικό κάθετο διάνυσμα της S στο σημείο (x, y, z). (1μ)

Διάρκεια εξέτασης 2,5 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ