B

Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. 2ο Εξάμηνο - 08 Ιουνίου 2017
Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές

Ονοματεπώνυμο .....

ΘΕΜΑΤΑ

Θ1. i) Θεωρούμε το συμμετρικό πίνακα $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. Να βρεθεί ορθογώνιος πίνακας P έτσι ώστε ο $P^{\top}AP$ να είναι διαγώνιος. **(1,5 μ)**

ii) Έστω V ορθομοναδιαίος χώρος και $T : V \to V$ αυτοσυζυγής γραμμικός μετασχηματισμός. (α) Δείξτε ότι κάθε ιδιοτιμή του T είναι πραγματικός αριθμός. (β) Δείξτε ότι τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές του T είναι ορθογώνια μεταξύ τους. **(1μ)**

Θ2. i) Έστω V ορθομοναδιαίος χώρος, F γραμμικός υπόχωρος του V διάστασης n και $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ μια ορθοκανονική βάση του F. Ορίζουμε $P : V \to F$ με $P\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} < \mathbf{x}, \mathbf{e}_i > \mathbf{e}_i$, για κάθε $\mathbf{x} \in V$. Δείξτε τα επόμενα. (α) Η P είναι γραμμική. (β) Για κάθε $\mathbf{y} \in F$, $P\mathbf{y} = \mathbf{y}$. (γ) Για κάθε $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} - P\mathbf{x} \in F^{\perp}$. (δ) Για κάθε $\mathbf{x} \in V$ και $\mathbf{y} \in F$, $\|\mathbf{x} - P\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y} - P\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$ (*Υπόδειξη: Παρατηρείστε ότι* $\mathbf{y} - P\mathbf{x} \in F$ *και λάβετε υπόψη το (γ)*). (ε) Για κάθε $\mathbf{x} \in V$ και $\mathbf{y} \in F$, $\|\mathbf{x} - P\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ και $\|P\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\|$. **(1,5μ)**

ii) Δίνεται η τετραγωνική μορφή $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $q(\mathbf{x}) = -2x_1^2 - 6x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$. (α) Να βρείτε τον συμμετρικό πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$ ώστε $q(\mathbf{x}) = X^{\top}AX$ και να βρείτε τις ιδιοτιμές του. (β) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $q_n : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με $q_n(\mathbf{x}) = X^{\top}A^nX$. Βρείτε τις ιδιοτιμές του A^n και εξετάστε για τις διάφορες τιμές του $n \in \mathbb{N}$ πότε η q_n είναι θετικά και πότε αρνητικά ορισμένη. **(1μ)**

Θ3. Έστω ο πίνακας $A(\alpha) = \begin{bmatrix} 2\alpha - 2 & -\alpha + 3 & \alpha - 3 \\ -10 & 9 & -8 \\ -2\alpha - 2 & \alpha + 1 & -\alpha \end{bmatrix}$ με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Βρείτε για ποιες τιμές του α ο πίνακας $A(\alpha)$ είναι διαγωνοποιήσιμος με μετασχηματισμό ομοιότητας και για ποιες όχι. **(1μ)**

ii) Κατασκευάστε πίνακα X τέτοιον ώστε να ισχύει $X^2 = A(7)$. **(1μ)**

iii) Για τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ο πίνακας $A(\alpha)$ δεν είναι διαγωνοποιήσιμος με μετασχηματισμό ομοιότητας, κατασκευάστε πλήρως την κανονική μορφή Jordan του $A(\alpha)$ και τον αντίστοιχο πίνακα ομοιότητας. **(1μ)**

Θ4. i) Τι καταλαβαίνουμε ότι ισχύει για έναν πίνακα A αν γνωρίζουμε ότι έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^4(\lambda + 1)^3$ και ελάχιστο πολυώνυμο $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda + 1)^2$; **(0,6μ)**

ii) Έστω δύο όμοιοι μεταξύ τους $\nu \times \nu$ πίνακες A, B. Να αποδειχθεί ότι έχουν τις ίδιες ακριβώς ιδιοτιμές με τις ίδιες αλγεβρικές και γεωμετρικές πολλαπλότητες. **(1,4μ)**

ΘΕΜΑ BONUS. Έστω ένας $\nu \times \nu$ πίνακας A και μ μια ιδιοτιμή του A. Αν x, y δύο μη μηδενικά ιδιοδιανύσματα (στήλες) τέτοια ώστε $Ax = \mu x$, $y^*A = \mu y^*$ και $y^*x = 0$, να αποδείξετε ότι η μ είναι πολλαπλή ιδιοτιμή του A. (Υπόδειξη: Αν η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής μ είναι μεγαλύτερη του 1, τότε δεν χρειάζεται να αποδείξουμε κάτι. Για το λόγο αυτό, υποθέτουμε ότι η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής μ είναι ίση με 1.) **(1μ)**

Διάρκεια εξέτασης: 2,5 ώρες **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**