ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
Τομέας Μαθηματικών
Πολυτεχνειούπολη – Ζωγράφου ΑΘΗΝΑ - 157 80

ΕΞΕΤΑΣΗ 3ΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ ΣΤΙΣ ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ, 31 Αυγούστου 2016

ΖΗΤΗΜΑ ΠΡΩΤΟ:

α) i) Να δειχτεί ότι οι συναρτήσεις $y_1(t)=t, y_2(t)=te^t$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες για $-\infty<t<+\infty$.

ii) Δίνεται η διαφορική εξίσωση $t^2y''-t(t+2)y'+(t+2)y=0$. Οι $y_1(t)=t, y_2(t)=te^t$ είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης. Διατυπώσατε σχετικό θεώρημα που συνδέει τη γραμμική ανεξαρτησία λύσεων με γνωστή ορίζουσα και ελέγξατε το συμπέρασμα σε σχέση με τις δοθείσες λύσεις. Εξετάστε το συμπέρασμά σας στο διάστημα $-3\le t\le 3$ και $3\le t$. (μον.1)

β) Να δοθεί η μορφή της γενικής λύσης της διαφορικής εξίσωσης $y^{(4)}+2y''+y=\cos t$. (μον.0.75)

γ) Αν α, β, γ είναι θετικές σταθερές να δειχτεί ότι η διαφορά κάθε δύο λύσεων της διαφορικής εξίσωσης $\alpha y''+\beta y'+\gamma y=\varphi(t)$ τείνει στο μηδέν του $t\to\infty$. (μον.0.5)

ΖΗΤΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟ:

α) Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο υποβιβασμού της τάξης να δειχθεί ότι αν η r_1 είναι διπλή ρίζα της $r(r-1)+ar+b=0$ τότε οι $x^{r_1}, x^{r_1}\ln x$ είναι λύσεις της $x^2y''+axy'+by=0,\ x>0$. (μον.1)

β) Δίνεται η διαφορική εξίσωση $(x+3)(x+1)^2y''+3(x^2-1)y'+8y=0$. Να χαρακτηριστεί το $x_0=-1$ αν είναι κανονικό ιδιάζον σημείο για την εξίσωση και αν είναι να καθοριστεί η δείκτρια εξίσωση, οι εκθέτες ιδιομορφίας και η ακτίνα σύγκλισης της λύσης σε μορφή δυναμοσειράς με κέντρο το $x_0=-1$. (μον.0.75)

γ) Να λυθεί με χρήση ολοκληρωτικού μετασχηματισμού η εξίσωση $y'(t)+2y(t)+\int_0^t y(u)du=\sin t,\ y(0)=0$. (μον.1)

ΖΗΤΗΜΑ ΤΡΙΤΟ:

α) Να λυθεί Π.Α.Τ. . $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{3x^2y+y^2}{2x^3+3xy}$ με $y(1)=2$. (μον. 1)

β) Να βρεθεί η γενική λύση της δ. ε. $y'=(a\cos t+b)y-y^3,\ a,b\in\mathbb{R}$. (μον. 1)

γ) Δίνεται το Π.Α.Τ. $y'=\dfrac{t^2+y^2}{t-y+1}, y(t_0)=y_0$. Να προσδιοριστούν όλες οι περιοχές του ty επιπέδου στις οποίες ισχύουν οι συνθήκες του θεωρήματος ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης. Να δικαιολογηθεί η απάντησή σας. Να δοθεί η μορφή του αναγωγικού σχήματος του Picard που δίνει τη λύση για $y(0)=0$ (χωρίς να γίνουν υπολογισμοί). (μον. 0.5)

ΖΗΤΗΜΑ ΤΕΤΑΡΤΟ:

Με τη μέθοδο των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων να βρεθεί η γενική λύση του γραμμικού συστήματος $\mathbf{x}'=A\cdot\mathbf{x}$ όπου $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix}$. Να προσδιοριστεί το είδος και η ευστάθεια του κρίσιμου σημείου $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. (μον. 2.5)

Δίνεται ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων:

$$L(t^n)=\frac{n!}{s^{n+1}},\ L(\cos at)=\frac{s}{s^2+a^2},\ L(\sin at)=\frac{a}{s^2+a^2},\ L(e^{at}f(t))=F(s-a),\ L(u_a(t)f(t-a))=e^{-sa}F(s),$$

αν $F(s)=L(f(t))$ και $u_a(t)=H(t-a)=\begin{cases}0, & t<a,\\ 1, & t\ge a,\end{cases}$, $a\ge 0$.

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες, **Καλή επιτυχία**