

N. Τράκας, I. Ράπτης

10/5/18

1. Σημειακό δίπολο με διπολική ροπή $\vec{p}_1 = p_0 \hat{y}$ είναι τοποθετημένο στο σημείο $(0,0,0)$ ενός τρισσορθογώνιου συστήματος $x-y-z$. Δεύτερο σημειακό δίπολο $\vec{p}_2$ με το ίδιο μέτρο διπολικής ροπής, $|\vec{p}_2| = p_0$, τοποθετείται στο σημείο $(a,0,0)$. Να υπολογιστεί η ενέργεια του συστήματος, καθώς και η ροπή στο $\vec{p}_2$, για τις διαφορετικές περιπτώσεις προσανατολισμού του $\vec{p}_2$: (α) $\vec{p}_2 = p_0 \hat{y}$, (β) $\vec{p}_2 = -p_0 \hat{y}$, (γ) $\vec{p}_2 = p_0 \hat{x}$, (δ) $\vec{p}_2 = -p_0 \hat{x}$, (ε) $\vec{p}_2 = p_0 \hat{z}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$W = -\vec{p} \cdot \vec{E}, \quad \vec{N} = \vec{p} \times \vec{E}, \quad [F_{x,y,z} = \vec{p} \cdot \vec{\nabla} E_{x,y,z}]$$

Όπου $\vec{p} \equiv \vec{p}_2$, και $\vec{E} = \vec{E}_{\vec{p}_1}(a,0,0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p}_1 \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p}_1}{r^3}$, με $\vec{p}_1 = p_0 \hat{y}$, $\vec{r} = a\hat{x}$, $\hat{r} = \hat{x}$, οπότε:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(p_0 \hat{y} \cdot \hat{x})\hat{x} - p_0 \hat{y}}{a^3} = -\frac{p_0 \hat{y}}{4\pi\epsilon_0 a^3}$$

Και στη συνέχεια υπολογίζονται τα εσωτερικά και εξωτερικά γινόμενα για τα μεγέθη

$$W = -\vec{p} \cdot \vec{E}, \quad \vec{N} = \vec{p} \times \vec{E},$$

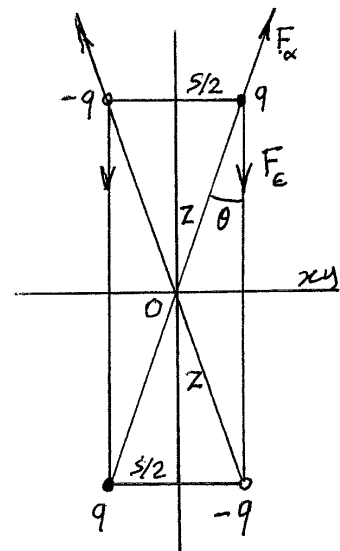
2. Στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο με διπολική ροπή $\vec{p} = (\hat{x} + \hat{y})p/\sqrt{2}$ βρίσκεται στη θέση $\vec{r} = z\hat{z}$, πάνω από αγωγίμο επίπεδο (x, y) το οποίο είναι γειωμένο [$\phi(x, y, z) = 0$ για $z < 0$ και για κάθε x, y]. Να υπολογίσετε τη δύναμη η οποία ασκείται πάνω στο δίπολο.

ΛΥΣΗ

Έστω ότι το κέντρο του διπόλου βρίσκεται στο σημείο $\vec{r} = z\hat{z}$ και ότι η απόσταση των δύο του φορτίων, $\pm q$ ($q > 0$), είναι s . Τότε, το θετικό φορτίο q θα βρίσκεται στο σημείο $\vec{r} = z\hat{z} + (\hat{x} + \hat{y})s/\sqrt{2}$ και το αρνητικό στο σημείο $\vec{r} = z\hat{z} - (\hat{x} + \hat{y})s/\sqrt{2}$. Για να μηδενίσουμε το δυναμικό στο επίπεδο xy , φανταζόμαστε δύο είδωλα: ένα με φορτίο q στη θέση $\vec{r} = -z\hat{z} - (\hat{x} + \hat{y})s/\sqrt{2}$ και ένα με φορτίο $-q$ στη θέση $\vec{r} = -z\hat{z} + (\hat{x} + \hat{y})s/\sqrt{2}$. Το είδωλο του διπόλου αποτελείται από δίπολο ροπής $-\vec{p}$ στη θέση $\vec{r} = -z\hat{z}$.

Τα τέσσερα φορτία βρίσκονται πάνω στο επίπεδο που περνά από τον άξονα των z και διχοτομεί το επίπεδο xy με κλίση ίση με τη μονάδα. Στο σχήμα σχεδιάζονται τα φορτία σε αυτό το επίπεδο. Πάνω στο φορτίο q του πραγματικού διπόλου ασκούνται οι δυνάμεις F_e και F_a , από τα είδωλα $-q$ και q αντίστοιχα. Συμμετρικές ως προς τον άξονα των z δυνάμεις ασκούνται και πάνω στο φορτίο $-q$ του διπόλου. Λόγω συμμετρίας, μόνο οι δυνάμεις στην κατεύθυνση z δεν θα αλληλοαναιρεθούν πλήρως.

Η ολική δύναμη πάνω στο δίπολο θα είναι:



$$\vec{F} = 2(F_{az} - F_{\varepsilon})\hat{z} = \frac{2q^2\hat{z}}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{\cos\theta}{4z^2 + s^2} - \frac{1}{4z^2} \right) = \frac{q^2\hat{z}}{2\pi\varepsilon_0} \left(\frac{2z}{(4z^2 + s^2)^{3/2}} - \frac{1}{4z^2} \right)$$

$$\vec{F} = \frac{q^2\hat{z}}{8\pi\varepsilon_0 z^2} \left(\frac{1}{(1 + (s/2z)^2)^{3/2}} - 1 \right) = \frac{q^2\hat{z}}{8\pi\varepsilon_0 z^2} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{s}{2z} \right)^2 + \dots - 1 \right).$$

Για $z \gg s$,

$$\vec{F} = -\frac{3s^2 q^2}{64\pi\varepsilon_0 z^6} \hat{z} = -\frac{3p^2}{64\pi\varepsilon_0 z^6} \hat{z}.$$

3. Σφαιρικός πυκνωτής αποτελείται από δύο ομόκεντρους λεπτότοιχους μεταλλικούς φλοιούς με ακτίνες R_1 και $R_2 = 3R_1$, αντίστοιχα. Μεταξύ των δύο φλοιών υπάρχει διηλεκτρικό υλικό, του οποίου η σχετική διηλεκτρική σταθερά είναι συνάρτηση της απόστασης r από το κέντρο συμμετρίας του συστήματος, σύμφωνα με την σχέση $\varepsilon_r(r) = 1 + \frac{R_1 R_2}{r^2}$, ενώ τα φορτία των δύο

οπλισμών είναι, $Q(R_1) = Q > 0$, $Q(R_2) = -Q$.

(α) Υπολογίστε την διηλεκτρική μετατόπιση, το ηλεκτρικό πεδίο και την πόλωση, στην περιοχή του πυκνωτή, όπου αυτά τα μεγέθη έχουν μη μηδενική τιμή.

(β) Υπολογίστε τις επιφανειακές πυκνότητες (στα σύνορα του διηλεκτρικού), την χωρική πυκνότητα (στον όγκο του διηλεκτρικού), και το συνολικό δέσμιο φορτίο.

(γ) Υπολογίστε την χωρητικότητα του συστήματος (ως πυκνωτή με διηλεκτρικό).

[Δίνεται: $\arctan(\sqrt{3}) = \pi/3$]

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$(\alpha) \quad \varepsilon_r(r) = 1 + \frac{R_1 R_2}{r^2} = \frac{r^2 + R_1 R_2}{r^2} \Rightarrow \chi = \varepsilon_r - 1 = \frac{R_1 R_2}{r^2}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r} = \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{Q\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{r^2}{r^2 + R_1 R_2} \frac{Q\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{Q\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 (r^2 + R_1 R_2)}}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} = \frac{r^2 + R_1 R_2}{r^2} \varepsilon_0 \frac{Q\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 (r^2 + R_1 R_2)} \Rightarrow \boxed{\vec{D} = \frac{Q\hat{r}}{4\pi r^2}},$$

$$\vec{P} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \vec{E} = \frac{R_1 R_2}{r^2} \varepsilon_0 \frac{Q\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 (r^2 + R_1 R_2)} = \frac{R_1 R_2}{(r^2 + R_1 R_2)} \frac{Q\hat{r}}{4\pi r^2},$$

$$(\beta) \quad \sigma_b = \hat{n} \cdot \vec{P} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_b(R_1) = (-\hat{r}) \cdot \vec{P}(R_1) = -\frac{Q}{4\pi R_1^2} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \\ \sigma_b(R_2) = (+\hat{r}) \cdot \vec{P}(R_2) = +\frac{Q}{4\pi R_2^2} \frac{R_1}{R_1 + R_2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \rho_b &= -\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 P_r) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{R_1 R_2}{(r^2 + R_1 R_2)} \frac{Q}{4\pi r^2} \right] = -\frac{Q R_1 R_2}{4\pi r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[(r^2 + R_1 R_2)^{-1} \right] = \\ &= -\frac{Q R_1 R_2}{4\pi r^2} \left[-(r^2 + R_1 R_2)^{-2} 2r \right] \Rightarrow \rho_b = \frac{Q R_1 R_2}{2\pi r} \left[\frac{1}{(r^2 + R_1 R_2)^2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{b,ολ} &= Q_{b,1}(R_1) + Q_{b,2}(R_2) + Q_{b,3}(R_1 < r < R_2) = 4\pi R_1^2 \sigma_b(R_1) + 4\pi R_2^2 \sigma_b(R_2) + \int_{R_1}^{R_2} \rho_b 4\pi r^2 dr = \\
&= Q \left(\frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} \right) + QR_1 R_2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{2r dr}{(r^2 + R_1 R_2)^2} = Q \left(\frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} \right) + QR_1 R_2 \int_{r=R_1}^{r=R_2} \frac{d(r^2 + R_1 R_2)}{(r^2 + R_1 R_2)^2} = \\
&= Q \left(\frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} \right) + QR_1 R_2 \frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2 (R_1 + R_2)} \Rightarrow Q_b = 0
\end{aligned}$$

(γ) Για τον υπολογισμό της χωρητικότητας, υπολογίζουμε τη διαφορά δυναμικού

$$\begin{aligned}
\Delta V &= - \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q \hat{r} \cdot d\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + R_1 R_2)} = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R_1 R_2}} \left[\arctan \frac{r}{\sqrt{R_1 R_2}} \right]_{R_1}^{R_2} = \\
&= - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R_1 R_2}} \left(\arctan \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} - \arctan \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \right) = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R_1 R_2}} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \Rightarrow \boxed{\Delta V = \frac{Q}{24\epsilon_0 R_1 \sqrt{3}}}
\end{aligned}$$

Άρα, η χωρητικότητα είναι $\boxed{C \equiv \frac{Q}{\Delta V} = 24\epsilon_0 R_1 \sqrt{3}}$

4. (α) Σφαιρικός πυκνωτής αποτελείται από δύο ομόκεντρους μεταλλικούς σφαιρικούς φλοιούς ακτίνων R_1 και R_2 , αντίστοιχα ($R_1 < R_2$). Ο εσωτερικός φλοιός έχει θετικό φορτίο $+Q$, και ο εξωτερικός φορτίο $-Q$. Στο χώρο μεταξύ των δύο φλοιών τοποθετείται γραμμικό διηλεκτρικό υλικό με σχετική διηλεκτρική σταθερά ϵ_r , ενώ τα φορτία των δύο φλοιών παραμένουν τα ίδια. Να υπολογιστούν (α) το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των φλοιών, (β) η πόλωση του διηλεκτρικού, (γ) τα δέσμια φορτία (χώρου και επιφάνειας) στο διηλεκτρικό και το συνολικό δέσμιο φορτίο, (δ) η διαφορά δυναμικού μεταξύ των φλοιών, και (ε) η χωρητικότητα του συστήματος

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$(α) \vec{E} = \vec{E}_0 / \epsilon_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r r^2}$$

$$(β) \vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \frac{Q \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r r^2} \Rightarrow \boxed{\vec{P} = \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \frac{Q \hat{r}}{4\pi\epsilon_r r^2}}$$

$$\begin{aligned}
(γ) \rho_b &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \frac{Q \hat{r}}{4\pi\epsilon_r r^2} \right) = -\frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \frac{Q}{4\pi\epsilon_r} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) = \\
&= -\frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \frac{Q}{4\pi\epsilon_r} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) = -\frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \frac{Q}{4\pi\epsilon_r} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{1}{r^2} \right) = 0
\end{aligned}$$

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n} \Rightarrow \sigma_b(r = R_1) = \vec{P} \cdot (-\hat{r}) = \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \frac{Q \hat{r}}{4\pi\epsilon_r R_1^2} \cdot (-\hat{r})$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_b = -\frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \frac{Q \hat{r}}{4\pi\epsilon_r R_1^2}}$$

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n} \Rightarrow \sigma_b(r = R_2) = \vec{P} \cdot (-\hat{r}) = \frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r} \frac{Q\hat{r}}{4\pi\varepsilon_r R_2^2} \cdot (+\hat{r})$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_b = + \frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r} \frac{Q\hat{r}}{4\pi\varepsilon_r R_2^2}}$$

$$Q_{b,ολ} = 4\pi R_1^2 \sigma_b(R_1) + 4\pi R_2^2 \sigma_b(R_2) = 0$$

$$(\delta) \quad V_2 - V_1 = -\int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_{R_1}^{R_2} E(r) dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_1}^{R_2} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

(ε) Η χωρητικότητα του πυκνωτή,

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = \varepsilon_r C_0.$$

5. Σφαιρικός πυκνωτής αποτελείται από δύο ομόκεντρους λεπτότοιχους σφαιρικούς φλοιούς με ακτίνες $R_1 = R$ και $R_2 = 2R$.

(α) Υπολογίστε την χωρητικότητα του συστήματος.

(β) Γεμίζουμε με διηλεκτρικό υλικό, σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς ε_r , τον φλοιό πεπερασμένου πάχους ($R \leq r \leq 1.5R$). Να υπολογίσετε τα μεγέθη $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$, $\vec{D} = \vec{D}(\vec{r})$, παντού στο εσωτερικό του πυκνωτή και την πόλωση, $\vec{P} = \vec{P}(\vec{r})$ (στην περιοχή του διηλεκτρικού).

(γ) Να υπολογίσετε την χωρητικότητα του νέου συστήματος

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει φορτίο $-Q$ στον εσωτερικό φλοιό και $+Q$ στον εξωτερικό φλοιό, λόγω της σφαιρικής συμμετρίας, το ηλεκτρικό πεδίο είναι
$$\vec{E} = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των δύο φλοιών είναι

$$\Delta V = -\int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} \Rightarrow \Delta V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \Rightarrow \boxed{C \equiv \frac{Q}{\Delta V} = 4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1} \right)}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των ακτίνων $C = 8\pi\varepsilon_0 R$

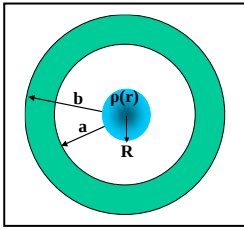
(β) Ορίζουμε τις περιοχές $I: (R \leq r \leq 1.5R)$, $II: (1.5R \leq r \leq 2R)$, και με βάση τη σχέση των πεδίων $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, $\vec{P} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \vec{E}$, ($\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 = K\varepsilon_0$), και τον νόμο του Gauss για διηλεκτρικά

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{free}, \text{ έχουμε } D_I = D_{II} = \frac{Q}{4\pi r^2}, \quad E_I = \frac{1}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \frac{Q}{4\pi r^2}, \quad E_{II} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q}{4\pi r^2}.$$

$$\text{Επίσης: } \vec{P}_I = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \vec{E}_I = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \frac{1}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \frac{Q}{4\pi r^2} = \frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r} \frac{Q}{4\pi r^2}, \quad \vec{P}_{II} = 0$$

(γ) Για την χωρητικότητα του νέου συστήματος, ολοκληρώνουμε το ηλεκτρικό πεδίο

$$\Delta V = -\int_R^{1.5R} \vec{E}_I \cdot d\vec{r} - \int_{1.5R}^{2R} \vec{E}_{II} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{12\pi\varepsilon_0 R} \left(\frac{1}{\varepsilon_r} + \frac{1}{2} \right) \Rightarrow \boxed{C \equiv \frac{Q}{\Delta V} = \frac{24\pi\varepsilon_0 \varepsilon_r R}{\varepsilon_r + 2}}$$



6. Συμπαγής σφαιρική κατανομή στατικού φορτίου εκτείνεται μέχρι ακτίνα R και έχει πυκνότητα $\rho(r) = \rho_0 \left(1 - r/R\right)$. Η κατανομή περιβάλλεται από ομόκεντρο διηλεκτρικό κέλυφος με μορφή σφαιρικού φλοιού με εσωτερική ακτίνα $a = 2R$, εξωτερική $b = 3R$, και σχετική διηλεκτρική σταθερά ϵ_r .

α) Υπολογίστε το πεδίο της ηλεκτρικής μετατόπισης $\vec{D}$ σε όλο το χώρο.

β) Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ παντού στο χώρο. γ) Υπολογίστε τα

δέσμια φορτία, στις επιφάνειες και στο εσωτερικό του διηλεκτρικού. Δ) Υπολογίστε τη διαφορά δυναμικού ανάμεσα στις δύο σφαιρικές επιφάνειες του διηλεκτρικού φλοιού.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Νόμος του Gauss για την Ηλεκτρική Μετατόπιση: $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{free} \Rightarrow \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{free}(S)$,

$$(0 \leq r < R): (4\pi r^2) D(r) = \rho_0 \int_0^r 4\pi r'^2 dr' - \rho_0 \int_0^r r'/R 4\pi r'^2 dr' = \pi r^3 \rho_0 \left[\frac{4}{3} - \frac{r}{R} \right]$$

$$D = \frac{\pi r^3 \rho_0}{4\pi r^2} \left[\frac{4}{3} - \frac{r}{R} \right] \Rightarrow \boxed{D(0 \leq r < R) = \frac{r \rho_0}{4} \left[\frac{4}{3} - \frac{r}{R} \right]}$$

$$(R \leq r < \infty): (4\pi r^2) D(r) = Q_{tot} = \rho_0 \int_0^R 4\pi r'^2 dr' - \rho_0 \int_0^R r'/R 4\pi r'^2 dr' = \pi R^3 \rho_0 \left[\frac{4}{3} - \frac{R}{R} \right]$$

$$D(r) = \frac{\pi R^3 \rho_0}{4\pi r^2} \left[\frac{4}{3} - 1 \right] \Rightarrow \boxed{D(R \leq r < \infty) = \frac{R^3 \rho_0}{12r^2}}$$

(β) Για το Ηλεκτρικό Πεδίο: $\vec{D} = \epsilon \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \vec{D} / \epsilon = \vec{D} / (\epsilon_r \epsilon_0)$

Όπου: $\epsilon_r(0 \leq r < 2R) = 1$, $\epsilon_r(2R \leq r \leq 3R) = \epsilon_r > 1$, και $\epsilon_r(3R \leq r < \infty) = 1$

$$\text{Άρα: } \boxed{E(0 \leq r < R) = \frac{r \rho_0}{4\epsilon_0} \left[\frac{4}{3} - \frac{r}{R} \right]}, \quad \boxed{E(R \leq r < 2R) = \frac{R^3 \rho_0}{12\epsilon_0 r^2}}, \quad \boxed{E(2R \leq r < 3R) = \frac{R^3 \rho_0}{12\epsilon_0 \epsilon_r r^2}},$$

$$\boxed{E(3R \leq r < \infty) = \frac{R^3 \rho_0}{12\epsilon_0 r^2}}$$

$$(\gamma) \quad \text{Πόλωση} \quad \vec{P} = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \vec{E} \Rightarrow \boxed{\vec{P}(2R \leq r \leq 3R) = \frac{(\epsilon_r - 1) R^3 \rho_0}{\epsilon_r 12r^2}}$$

$$\text{Δέσμια Φορτία: } \sigma_b(2R) = -\frac{(\epsilon_r - 1) R^3 \rho_0}{\epsilon_r 12(2R)^2} = -\frac{(\epsilon_r - 1) R \rho_0}{\epsilon_r 48}, \quad \sigma_b(3R) = -\frac{(\epsilon_r - 1) R \rho_0}{\epsilon_r 12 \cdot 9}$$

$$\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 P(r)) = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{(\epsilon_r - 1) R^3 \rho_0}{\epsilon_r 12r^2} \right) = 0$$

$$(\delta) \quad \Delta V = -\int_{2R}^{3R} E(r) dr = -\frac{R^3 \rho_0}{12\epsilon_0 \epsilon_r} \int_{2R}^{3R} \frac{dr}{r^2} = \frac{R^3 \rho_0}{12\epsilon_0 \epsilon_r} \left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{3R} \right) = \frac{R^3 \rho_0}{12\epsilon_0 \epsilon_r} \left(\frac{1}{6R} \right) = \frac{R^2 \rho_0}{72\epsilon_0 \epsilon_r}$$

7. Σφαιρικός πυκνωτής αποτελείται από δύο ομόκεντρους λεπτότοιχους μεταλλικούς φλοιούς με ακτίνες R_1 και R_2 , αντίστοιχα. Μεταξύ των δύο φλοιών υπάρχει διηλεκτρικό υλικό, του οποίου η σχετική διηλεκτρική σταθερά είναι συνάρτηση της απόστασης r από το κέντρο συμμετρίας του συστήματος, σύμφωνα με την σχέση $\varepsilon_r(r) = 1 + \frac{(r-R_1)(R_2-r)}{r^2}$, ενώ τα φορτία των δύο φλοιών είναι, $Q(R_1) = Q > 0$, $Q(R_2) = -Q$.

(α)(5%) Υπολογίστε την διηλεκτρική μετατόπιση, το ηλεκτρικό πεδίο και την πόλωση, στην περιοχή του πυκνωτή, όπου αυτά τα μεγέθη έχουν μη μηδενική τιμή.

(β)(10%) Υπολογίστε τις επιφανειακές πυκνότητες (στα σύνορα του διηλεκτρικού) και την χωρική πυκνότητα (στον όγκο του διηλεκτρικού) των δέσμιων φορτίων.

(γ)(10%) Υπολογίστε την χωρητικότητα του συστήματος (ως πυκνωτή με διηλεκτρικό).

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$\varepsilon_r(r) = 1 + \frac{(r-R_1)(R_2-r)}{r^2} = \frac{(R_1+R_2)r + R_1R_2}{r^2}$$

(α)

$$\varepsilon_r(r) = 1 + \chi = 1 + \frac{(r-R_1)(R_2-r)}{r^2} \Rightarrow \chi = \frac{(r-R_1)(R_2-r)}{r^2}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r} = \frac{1}{1 + \frac{(r-R_1)(R_2-r)}{r^2}} \frac{Q\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 [(R_1+R_2)r - R_1R_2]}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \left(1 + \frac{(r-R_1)(R_2-r)}{r^2}\right) \varepsilon_0 \frac{1}{1 + \frac{(r-R_1)(R_2-r)}{r^2}} \frac{Q\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q\hat{r}}{4\pi r^2},$$

$$\vec{P} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 \frac{(r-R_1)(R_2-r)}{r^2} \frac{1}{[(R_1+R_2)r - R_1R_2]} \frac{Q\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0} =$$

$$= \frac{(r-R_1)(R_2-r)}{r^2 + (r-R_1)(R_2-r)} \frac{Q\hat{r}}{4\pi r^2} = \frac{Q\hat{r}}{4\pi r^2} - \frac{Q\hat{r}}{4\pi [(R_1+R_2)r - R_1R_2]}$$

(β)

$$\sigma_b = \hat{n} \cdot \vec{P} \Rightarrow \sigma_b(R_1) = \sigma_b(R_2) = 0$$

$$\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 P_r) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{Q}{4\pi} - \frac{Qr^2}{4\pi [(R_1+R_2)r - R_1R_2]} \right] =$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{Qr^2}{4\pi [(R_1+R_2)r - R_1R_2]} \right] = \frac{Q}{4\pi r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{r^2}{[(R_1+R_2)r - R_1R_2]} \right]$$

$$= \frac{Q}{4\pi r^2} \left[\frac{2r}{[(R_1+R_2)r - R_1R_2]} - \frac{r^2 (R_1+R_2)}{[(R_1+R_2)r - R_1R_2]^2} \right]$$

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = V(R_2) - V(R_1) = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{Q\hat{r} \cdot d\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 [(R_1+R_2)r - R_1R_2]} \Rightarrow$$

(γ)

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (R_1+R_2)} \ln [(R_1+R_2)r - R_1R_2] \Big|_{R_1}^{R_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (R_1+R_2)} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\varepsilon_0 (R_1+R_2)}{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2}$$

8. Κυλινδρικός αγωγός αποτελείται από δύο κυλινδρικά τμήματα ίδιας ακτίνας R_0 και μήκους L_1, L_2 , αντίστοιχα το καθένα, συνδεδεμένα εν σειρά κατά μήκος του άξονα συμμετρίας του. Οι αγωγιμότητες των δύο τμημάτων είναι αντίστοιχα $\sigma_1^* \neq \sigma_2^*$, σταθερή συνάρτηση του χώρου, στο αντίστοιχο τμήμα, η κάθε μία. Στα δύο άκρα του συνολικού συστήματος εφαρμόζεται (μέσω τροφοδοτικού τάσης, και με τη βοήθεια δύο επίπεδων ηλεκτροδίων άπειρης αγωγιμότητας) μία σταθερή (ως προς το χρόνο) διαφορά δυναμικού ΔV . Να υπολογιστούν: (α) το ηλεκτρικό πεδίο σε όλη την έκταση του συστήματος, (β) η πτώση τάσης, ως συνάρτηση της θέσης, κατά μήκος του άξονα του συστήματος, (γ) η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το σύστημα, (δ) η συνολική αντίσταση του συστήματος. (ε) Να διερευνηθεί αν, στη μόνιμη κατάσταση, υπάρχει συσσώρευση φορτίων χώρου ή επιφανειακών φορτίων, στα δύο κυλινδρικά τμήματα και να υπολογιστούν οι πυκνότητες φορτίων, ρ, σ , αντίστοιχα, όπου αυτές έχουν μη-μηδενικές τιμές.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Αν S είναι η διατομή του αγωγού, από την διατήρηση φορτίου, στην μόνιμη κατάσταση έχουμε:

$$J_1 = J_2 \Rightarrow \sigma_1^* E_1 = \sigma_2^* E_2 \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{\sigma_2^*}{\sigma_1^*} \Rightarrow \frac{\Delta V_1 / l_1}{\Delta V_2 / l_2} = \frac{\sigma_2^*}{\sigma_1^*} \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta V_1}{\Delta V_2} = \frac{l_1 \sigma_2^*}{l_2 \sigma_1^*}}$$

$$E_1 l_1 + E_2 l_2 = \Delta V \Rightarrow E_1 l_1 + E_1 \frac{\sigma_1^*}{\sigma_2^*} l_2 = \Delta V \Rightarrow$$

$$\alpha) \boxed{E_1 = \frac{\Delta V}{l_1 + \frac{\sigma_1^*}{\sigma_2^*} l_2}, \quad E_2 = \frac{\Delta V}{l_2 + \frac{\sigma_2^*}{\sigma_1^*} l_1}}$$

β) Υπολογίζουμε τις σταθερές των σχέσεων

$$V_1(0 \leq x \leq l_1) = a_1 + \beta_1 x, \quad V_1(l_1 \leq x \leq l_1 + l_2) = a_2 + \beta_2 x$$

Με τις προηγούμενες συνοριακές συνθήκες, ($V(x=0)=V_1$, $V(x=l_1)=\Delta V_1$, $V(x=l_1+l_2)=V_2$),

$$\text{οπότε: } V(0 \leq x \leq l_1) = V_1 + (\Delta V_1 - V_1) \frac{x}{l_1}, \quad V(l_1 \leq x \leq l_1 + l_2) = \Delta V_1 + (V_2 - \Delta V_1) \frac{x - l_1}{l_2 - l_1}$$

$$\gamma) I = \frac{\Delta V}{R_1 + R_2} = \frac{\Delta V}{\frac{1}{\sigma_1^*} \frac{l_1}{S} + \frac{1}{\sigma_2^*} \frac{l_2}{S}} \Rightarrow \boxed{I = \frac{S \sigma_1^* \sigma_2^* \Delta V}{\sigma_2^* l_1 + \sigma_1^* l_2}}$$

$$\delta) R = R_1 + R_2 \Rightarrow \boxed{R = \frac{\sigma_2^* l_1 + \sigma_1^* l_2}{\sigma_1^* \sigma_2^* S}}$$

ε) Λόγω της διαφοράς ηλεκτρικού πεδίου, στα δύο διαφορετικά τμήματα (σύμφωνα με το ερώτημα (α)), θα έχουμε:

$$\Delta E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow \sigma = \epsilon_0 (E_2 - E_1) \Rightarrow \sigma = \epsilon_0 \left(\frac{\Delta V}{l_2 + \frac{\sigma_2^*}{\sigma_1^*} l_1} - \frac{\Delta V}{l_1 + \frac{\sigma_1^*}{\sigma_2^*} l_2} \right) = \epsilon_0 \left(\frac{\sigma_1^* \Delta V}{\sigma_1^* l_2 + \sigma_2^* l_1} - \frac{\sigma_2^* \Delta V}{\sigma_1^* l_2 + \sigma_2^* l_1} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma = \epsilon_0 \left(\frac{(\sigma_1^* - \sigma_2^*) \Delta V}{\sigma_1^* l_2 + \sigma_2^* l_1} \right)}$$

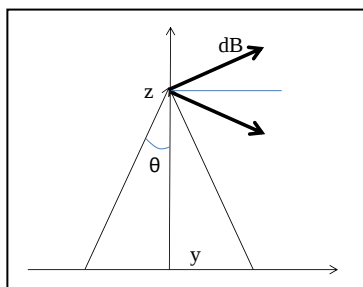
9. Θεωρήστε γνωστό ότι το μαγνητικό πεδίο σε απόσταση $r_{\perp}$ από ευθύγραμμο ρεύμα άπειρου μήκους και έντασης I είναι ίσο με $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_{\perp}}$

(α) Επίπεδη ταινία πλάτους L (κατά τον άξονα y), αμελητέου πάχους και άπειρου μήκους, άγει ρεύμα (κατά τον άξονα x) συνολικής έντασης I , ομοιόμορφα κατανομημένο στην επιφάνειά της. Να υπολογίσετε το μαγνητικό πεδίο πάνω στο μεσοκάθετο επίπεδο της ταινίας και σε απόσταση z από αυτήν, χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της εκφώνησης.

(β) Να υπολογιστεί η οριακή τιμή του μαγνητικού πεδίου για τις περιπτώσεις $L \gg z$ και $L \ll z$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Από την διαφορική λωρίδα, σε απόσταση y και με διαφορικό πλάτος dy , προκύπτει, σε κατακόρυφη απόσταση z επί της μεσοκαθέτου, στοιχειώδες μαγνητικό πεδίο dB κάθετο στην απόσταση $r_{\perp}$ που ενώνει «πηγή-και-σημείο παρατήρησης» και έχει μέτρο $r_{\perp} = (z^2 + y^2)^{1/2}$



$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi r_{\perp}}, \quad \text{και} \quad dI = \frac{I}{L} dy, \quad r_{\perp} = (z^2 + y^2)^{1/2}$$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{2\pi L} \frac{dy}{(z^2 + y^2)^{1/2}}$$

Συνυπολογίζοντας τις οριζόντιες προβολές από τις δύο συμμετρικές διαφορικές λωρίδες (από τα σημεία $\pm y$) παίρνουμε

$$dB_{op.(\pm y)} = 2 \cos \theta \frac{\mu_0 I}{2\pi L} \frac{dy}{(z^2 + y^2)^{1/2}} = \frac{\mu_0 I}{\pi L} \frac{z}{(z^2 + y^2)^{1/2}} \frac{dy}{(z^2 + y^2)^{1/2}} = \frac{\mu_0 I}{\pi L} \frac{z dy}{(z^2 + y^2)} \Rightarrow B_{op} = \frac{\mu_0 I z}{\pi L} \int_0^{L/2} \frac{dy}{(z^2 + y^2)}$$

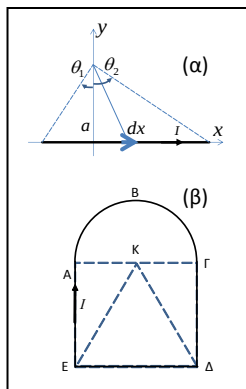
Χρησιμοποιώντας την (δοσμένη) σχέση: $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \text{τοξεφ} \frac{u}{a}$, παίρνουμε

$$B_{op} = \frac{\mu_0 I z}{\pi L} \frac{1}{z} \text{τοξεφ} \frac{y}{z} \Big|_{y=0}^{y=L/2} = \frac{\mu_0 I}{\pi L} \left[\text{τοξεφ} \frac{L}{2z} - \text{τοξεφ} 0 \right] \Rightarrow \boxed{B_{op} = \frac{\mu_0 I}{\pi L} \text{τοξεφ} \frac{L}{2z}}$$

(β) Η οριακή τιμή του μαγνητικού πεδίου για τις περιπτώσεις $L \gg z$ και $L \ll z$.

$$B_{op} (z \gg L) \approx \frac{\mu_0 I}{\pi L} \left(\frac{L}{2z} \right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi z} : \text{πεδίο ευθύγραμμου ρεύματος άπειρου μήκους [βλ. (α)]}$$

$$B_{op} (z \ll L) \approx \frac{\mu_0 I}{\pi L} \text{τοξεφ}(\infty) \Rightarrow \boxed{B_{op} (z \ll L) \frac{\mu_0 I}{\pi L} \frac{\pi}{2} = \mu_0 \frac{J}{2}, \quad J = I/L}, \text{ [βλ. (β)]}$$



10. (α₁) Θεωρήστε γνωστό ότι το μαγνητικό πεδίο στο σημείο $(0, a)$ του

σχήματος (α) έχει μέτρο $B_0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$ (όλα τα μεγέθη φαίνονται

στο σχήμα, a : κάθετη απόσταση του σημείου Ο από το τμήμα του ευθύγραμμου αγωγού), και φορά κάθετα στη σελίδα (προ τον αναγνώστη).

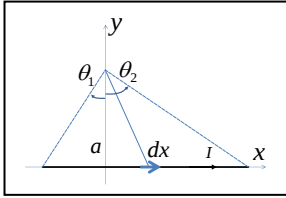
(α₂) Υπολογίστε το μέτρο του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο ημικυκλικού αγωγού ακτίνας R , που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I .

(β) Το αγωγίμο πλαίσιο ΑΒΓΔΕΑ διαρρέεται από ρεύμα έντασης I .

[Γεωμετρικά δεδομένα: ΚΕΔ: ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς $2a$, ΑΒΓ: ημικύκλιο κέντρου Κ, ΑΓΔΕ: ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.]

Με βάση τα αποτελέσματα των (α₁) και (α₂), υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο στο σημείο Κ του σχήματος (β), συναρτήσει των I και a .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

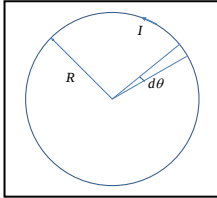


$$(\alpha_1) \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad \Delta \text{ΕΝ ΧΡΕΙΑΖΕΤΑΙ}$$

$$\vec{r}' = x\hat{x}, \quad d\vec{r}' = \hat{x}dx, \quad \vec{r} = a\hat{y}, \quad \vec{r} - \vec{r}' = a\hat{y} - x\hat{x}$$

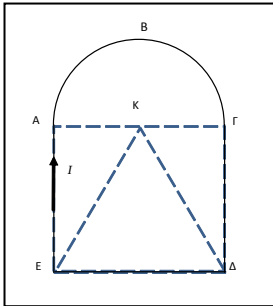
$$d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = \hat{z}adx, \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = (x^2 + a^2)^{1/2}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \hat{z} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \hat{z} \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left(\frac{x_2}{(x_2^2 + a^2)^{1/2}} - \frac{x_1}{(x_1^2 + a^2)^{1/2}} \right) = \hat{z} \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$



$$(\alpha_2) \quad \vec{B} = \int d\vec{B} = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(\hat{\theta} R d\theta) \times (-R\hat{r})}{R^3} =$$

$$\vec{B} = \hat{z} \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^\pi d\theta \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \hat{z} \frac{\mu_0 I}{4R}}$$



$$(\beta) \quad \vec{B}_{K, \text{ολ}} = \hat{z} (B_{K, AB\Gamma} + B_{K, \Gamma\Delta} + B_{K, \Delta E} + B_{K, EA})$$

$$B_{\Gamma\Delta} = B_{EA} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \left(\sin \frac{\pi}{3} - \sin 0 \right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \frac{\sqrt{3}}{2}$$

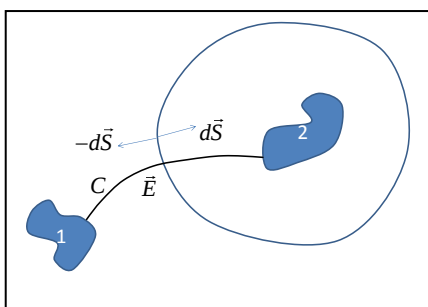
$$B_{EA} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a\sqrt{3}} \left(\sin \frac{\pi}{6} - \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a\sqrt{3}} (0.5 + 0.5) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a\sqrt{3}}$$

$$B_{AB\Gamma} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I}{2a} = \frac{\mu_0 I}{4a}$$

$$\boxed{B_{K, \text{ολ}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi + \sqrt{3} \right)}$$

11. Δύο μεταλλικά αντικείμενα (υλικό πολύ μεγάλης αγωγιμότητας) πεπερασμένων διαστάσεων απέχουν πεπερασμένη απόσταση και βρίσκονται μέσα σε αγωγίμο υλικό με πεπερασμένη αγωγιμότητα σ^* . Ανάμεσα στα δύο αντικείμενα επιβάλλεται, με τη βοήθεια τροφοδοτικού τάσης, μία διαφορά δυναμικού ΔV , η οποία έχει ως αποτέλεσμα την ροή ρεύματος από το ένα αντικείμενο στο άλλο, αποκλειστικά. (α) Δείξτε ότι, στη μόνιμη κατάσταση, τα δύο αντικείμενα είναι φορτισμένα με ίσα και αντίθετα φορτία, (έστω, $\pm Q$), και επομένως χαρακτηρίζονται από μία χωρητικότητα C . Εξηγήστε αν τα φορτία αυτά είναι κατανομημένα με τη μορφή φορτίων χώρου ή επιφανειακών φορτίων. (β) Δείξτε ότι, μετά την αποκατάσταση μόνιμης κατάστασης (όταν κανένα μέγεθος δεν μεταβάλλεται με το χρόνο), η πυκνότητα φορτίων, στον μεταξύ των δύο αντικειμένων χώρο, είναι $\rho = 0$. (γ) Δείξτε ότι η αντίσταση R και η χωρητικότητα C του συστήματος συνδέονται με τη σχέση $RC = \varepsilon_0 / \sigma^*$. (δ) Δείξτε ότι κατά τις μεταβατικές καταστάσεις, (αμέσως μετά την εφαρμογή τάσης, ή, αμέσως μετά την διακοπή της τάσης), όλα τα ηλεκτρικά μεγέθη μεταβάλλονται με εκθετικό τρόπο με το χρόνο, και υπολογίστε την σταθερά χρόνου αυτής της μεταβολής.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



α) Στάσιμη (χρονοανεξάρτητη) κατάσταση

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\sigma^* \vec{E}) = 0 \Rightarrow \sigma^* \left[\vec{\nabla} \cdot (\vec{E}) = 0 \Rightarrow \nabla^2 V = 0 \right]$$

Άρα, μεταξύ των δύο αγωγών υφίσταται ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ ίδιο με το αντίστοιχο ηλεκτροστατικό πεδίο. Γι αυτό το πεδίο

ισχύει. (Η σχέση $\vec{\nabla} \cdot (\sigma^* \vec{E}) = \sigma^* \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ ισχύει στο βαθμό που η αγωγιμότητα είναι ίδια σε όλο το χώρο μεταξύ των αγωγών).

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_2}{\epsilon_0} \Rightarrow Q_2 = \epsilon_0 \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$Q_1 = \epsilon_0 \oint_s \vec{E} \cdot (-d\vec{S}) = -\epsilon_0 \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = -Q_2$$

Επομένως τα φορτία των δύο αγωγών είναι ίσα και αντίθετα.

β) Στον μεταξύ των δύο αγωγών χώρο, ισχύει (από το (α) ερώτημα), $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$, αλλά $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$, επομένως $\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$

γ) Για τον υπολογισμό χωρητικότητας και αντίστασης: $C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}}$, $R = \frac{\Delta V}{I}$

Επομένως:

$$RC = \frac{\Delta V}{I} \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{I} = \frac{\epsilon_0 \int_s \vec{E} \cdot d\vec{S}}{\int_s \vec{J} \cdot d\vec{S}} = \frac{\epsilon_0 \int_s \vec{E} \cdot d\vec{S}}{\sigma^* \int_s \vec{E} \cdot d\vec{S}} \Rightarrow \boxed{RC = \frac{\epsilon_0}{\sigma^*}}$$

δ) Στη μεταβατική κατάσταση: $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \sigma^* (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \sigma^* \left(\frac{\rho}{\epsilon_0} \right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

Αναφερόμενοι σε σταθερό σημείο του χώρου, η μερική παράγωγος ως προς το χρόνο γίνεται

κανονική παράγωγος, οπότε: $\frac{d\rho}{dt} = -\left(\frac{\sigma^*}{\epsilon_0} \right) \rho \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\left(\frac{\sigma^*}{\epsilon_0} \right) dt \Rightarrow \boxed{\rho = \rho_0 e^{-\left(\frac{\sigma^*}{\epsilon_0} \right) t}}$