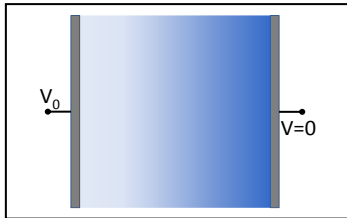


ΣΧΟΛΗ ΕΜΦΕ – ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΦΥΣΙΚΗ ΙΙ (ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ–Ι) 2017-18
2^η ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Ν. Τράκας, Ι. Ράπτης

2/4/2018



1. Δύο αγωγίμα επίπεδα, εμβαδού S_0 το καθένα, είναι παράλληλα μεταξύ τους (και προς το επίπεδο x-y) και απέχουν απόσταση πολύ μικρότερη από τις άλλες δύο διαστάσεις τους, ώστε τα φαινόμενα των άκρων να μπορούν να θεωρηθούν αμελητέα, (ισοδύναμα: να μπορούν να θεωρηθούν ως επίπεδα άπειρης έκτασης). Το ένα επίπεδο, που βρίσκεται στο $z=0$, έχει συνδεθεί με σταθερό δυναμικό $V_1=V_0>0$. Το δεύτερο επίπεδο, που βρίσκεται στο $z=D>0$, έχει συνδεθεί με τη Γη ($V_2=0$). Στο χώρο μεταξύ των επιπέδων βρίσκεται κατανεμημένο θετικό φορτίο με πυκνότητα $\rho(z)=6\varepsilon_0 V_0 z / D^3$. (α) Να υπολογιστεί η συνάρτηση δυναμικού και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στην περιοχή μεταξύ των δύο αγωγίμων επιπέδων. (β) Να υπολογιστεί η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σε κάθε επίπεδο και το συνολικό φορτίο του συστήματος (στα δύο αγωγίμα επίπεδα, και ανάμεσά τους). (γ) Να υπολογιστεί η ηλεκτροστατική ενέργεια του συστήματος (χρησιμοποιείστε δύο διαφορετικούς τρόπους υπολογισμού και συγκρίνετε το αποτέλεσμα). (δ) Σχεδιάστε ποιοτικό σκαρίφημα των δυναμικών γραμμών του ηλεκτροστατικού πεδίου.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Από συμμετρία «οριακών συνθηκών» + «πηγών»: $V=V(z) \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\hat{z} \frac{dV}{dz} = \hat{z}E_z$

Διαφ. μορφή N. Gauss: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{dE_z}{dz} = 6 \frac{V_0 z}{D^3} \Rightarrow dE_z = 6 \frac{V_0 z}{D^3} dz \Rightarrow E_z = 3 \frac{V_0 z^2}{D^3} + C_1$

$$E_z = 3 \frac{V_0 z^2}{D^3} + C_1 \Rightarrow -\frac{dV}{dz} = 3 \frac{V_0 z^2}{D^3} + C_1 \Rightarrow V = -V_0 \left(\frac{z}{D} \right)^3 - C_1 z + C_2$$

Για $z=0$: $\Rightarrow C_2 = V_0$

Για $z=D$: $0 = V_0 \left[1 - \left(\frac{D}{D} \right)^3 \right] - C_1 D \Rightarrow C_1 = 0$

Αντικαθιστώντας το $C_2 = V_0$: $V(z) = V_0 \left[1 - (z/D)^3 \right]$ και $\vec{E} = -\frac{dV}{dz} \hat{z} = 3 \frac{V_0}{D} (z/D)^2 \hat{z}$

(β) $\sigma = \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \hat{n} \Rightarrow \sigma(z=0) = \varepsilon_0 \vec{E}(z=0) \cdot \hat{z} = 0$

$$\sigma(z=D) = \varepsilon_0 \vec{E}(z=D) \cdot (-\hat{z}) \Rightarrow \sigma(z=D) = -3\varepsilon_0 V_0 / D$$

Τα συνολικά επιφανειακά φορτία:

$$Q_1 = Q(z=0) = 0, \quad Q_2 = Q(z=D) = S_0 \sigma(z=D) = -3\varepsilon_0 V_0 S_0 / D$$

Το φορτίο χώρου (μεταξύ των οπλισμών)

$$Q = \int \rho d^3r = \int_{z=0}^D (6\varepsilon_0 V_0 z / D^3) (S_0 dz) \Rightarrow Q = 3S_0 \varepsilon_0 V_0 / D = -Q(z=D)$$

Παρατηρούμε ότι ο ένα οπλισμός ($z=0$) είναι αφόρτιστος (παρ' ότι βρίσκεται σε μη-μηδενικό δυναμικό) και ο άλλος οπλισμός (παρ' ότι βρίσκεται σε μηδενικό δυναμικό) έχει φορτίο ίσο

και αντίθετο με το συνολικό φορτίο χώρου ώστε να “απορροφά” όλες τις δυναμικές γραμμές που “φυτρώνουν” από το φορτίο χώρου

(γ) Η ενέργεια μπορεί να υπολογιστεί με δύο τρόπους:

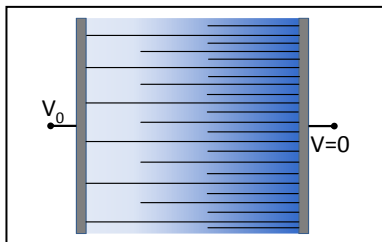
(γ1) Μέσω της πυκνότητας Η/Σ ενέργειας

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{z=0}^D (E^2) (d^3r) = \frac{9\epsilon_0}{2} \frac{V_0^2}{D^6} \int_{z=0}^D z^4 (S_0 dz) = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{V_0^2}{D^6} S_0 \frac{D^5}{5} \Rightarrow W = \frac{9}{10} \frac{\epsilon_0 S_0 V_0^2}{D}$$

(γ2) Μέσω της σχέσης:

$$W = \frac{1}{2} \left[\sum_i Q_i V_i \right] = \frac{1}{2} \left[Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + \int_{z=0}^D \rho V d^3r \right]$$

$$W = \frac{1}{2} \left[0 \cdot V_1 + Q_2 \cdot 0 + \int_{z=0}^D \rho V d^3r \right] = \frac{1}{2} \int_{z=0}^D (6\epsilon_0 V_0 z / D^3) V_0 (1 - (z/D)^3) S_0 dz \Rightarrow W = \frac{9}{10} \frac{\epsilon_0 S_0 V_0^2}{D}$$



(δ) Οι δυναμικές γραμμές θα είναι ευθείες παράλληλες στον άξονα-z, αφού αποδείχτηκε ότι $\vec{E} = \hat{z}E_z$, σε συνέπεια και με την αντίστοιχη διαφορική τους εξίσωση :

$$(dy/dz) = (E_y / E_z) = 0 \Rightarrow dy = 0 \Rightarrow y = C$$

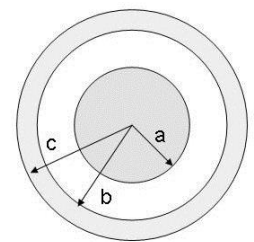
Η “πύκνωση” των δυναμικών γραμμών, από το $z=0$ προς το $z=D$, (αφού η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου αυξάνει ως

$E \sim z^2$), δεν οφείλεται στην αλλαγή της γεωμετρίας τους αλλά στο γεγονός ότι “φυτρώνουν” νέες δυναμικές γραμμές λόγω της πυκνότητας του φορτίου χώρου (οι νέες γραμμές θα “φύτρωναν” ακόμη και αν η πυκνότητα ήταν σταθερή ή και μειούμενη). [Η απεικόνιση της “δημιουργίας” των δυναμικών γραμμών από συγκεκριμένα επίπεδα-z είναι σχηματική, και δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα. Για τη συγκεκριμένη συνεχή μεταβολή της έντασης του μονο-διάστατου ηλεκτρικού πεδίου δεν υπάρχει τρόπος ακριβούς αναπαράστασης της συνεχούς αύξησης της πυκνότητας των παράλληλων δυναμικών γραμμών].

2. Μια συμπαγής αγωγίμη σφαίρα ακτίνας a έχει θετικό φορτίο $3Q$. Η σφαίρα περικλείεται από χωρική κατανομή φορτίου που έχει σταθερή πυκνότητα στο εσωτερικό ενός, ομόκεντρου ως προς αυτήν, σφαιρικού φλοιού εσωτερικής ακτίνας b και εξωτερικής c , και συνολικό φορτίο $-Q$.

(α) Να υπολογίσετε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ως συνάρτηση της απόστασης από το κέντρο της αγωγίμης σφαίρας.

(β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση του ηλεκτρικού πεδίου ως συνάρτηση της απόστασης από το κέντρο της αγωγίμης σφαίρας.



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

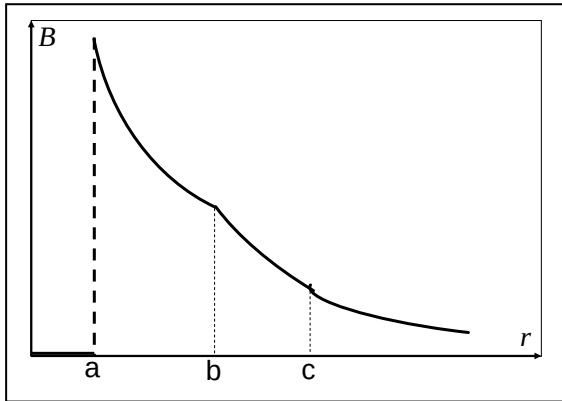
(α)

$r < a$, εσωτερικό αγωγού $\Rightarrow \vec{E}_I (r < a) = 0$

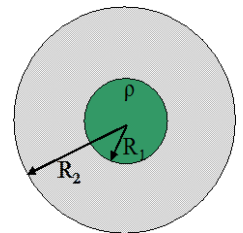
$a < r < b$ σφαιρική συμμετρία $\Rightarrow \vec{E}_{II} (a < r < b) = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$

$b < r < c$ σφαιρική συμμετρία $\Rightarrow \vec{E}_{III} (b < r < c) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[3Q - Q \frac{r^3 - b^3}{c^3 - b^3} \right] \hat{r}$

$r > c$ σφαιρική συμμετρία $\Rightarrow \vec{E}_{IV} (r > c) = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$



3. Ηλεκτρικό φορτίο είναι καταμεμημένο στον όγκο σφαίρας κέντρου Ο και ακτίνας R_1 , με σταθερή πυκνότητα ρ . Η κατανομή περιβάλλεται από συμπαγή μεταλλικό σφαιρικό φλοιό ακτίνων R_1 και $R_2 > R_1$, το συνολικό φορτίο του οποίου είναι μηδέν. Θεωρήστε τα σημεία Α, Β, Γ, όπου $OG < R_1$, $R_1 < OB < R_2$, $OA > R_2$. Να υπολογίσετε



- τις πυκνότητες ηλεκτρικού φορτίου στις επιφάνειες του μεταλλικού φλοιού.
- το ηλεκτρικό πεδίο στα σημεία Α, Β, Γ.
- τα δυναμικά, ως προς το άπειρο, των σημείων Α, Β, Γ,
- την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια U του συστήματος.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Επειδή στο εσωτερικό του φλοιού το ηλεκτρικό πεδίο πρέπει να είναι μηδέν, από το νόμο του Gauss συνάγεται ότι για κάθε σφαιρική επιφάνεια ομόκεντρη με το φλοιό, και με ακτίνα μεταξύ των $R_1 < r < R_2$, το περικλειόμενο φορτίο πρέπει να είναι μηδέν. Επομένως, στην εσωτερική επιφάνεια του σφαιρικού φλοιού επάγεται, ηλεκτροστατικά, φορτίο ίσο και αντίθετο με το συνολικό φορτίο της χωρικής κατανομής, οπότε

$$Q(R_1) = -\frac{4}{3}\pi R_1^3 \rho \Rightarrow \sigma(R_1) = \left[-\frac{4}{3}\pi R_1^3 \rho \right] / 4\pi R_1^2 \Rightarrow \sigma(R_1) = -\frac{R_1 \rho}{3}$$

Επειδή το συνολικό φορτίο του φλοιού είναι μηδέν, η εξωτερική επιφάνεια φέρει φορτίο ίσο και αντίθετο με εκείνο της εσωτερικής

$$Q(R_2) = \frac{4}{3}\pi R_1^3 \rho \Rightarrow \sigma(R_2) = \left[\frac{4}{3}\pi R_1^3 \rho \right] / 4\pi R_2^2 \Rightarrow \sigma(R_2) = \frac{R_1^3 \rho}{3R_2^2}$$

(β) Από το νόμο του Gauss, σε συνδυασμό με την σφαιρική συμμετρία, έχουμε:

$$\vec{E}(r < R_1) = \frac{\rho \vec{r}}{3\epsilon_0}, \quad \vec{E}(R_1 < r < R_2) = 0,$$

$$\vec{E}(r > R_2) = \frac{(4\pi R_1^3 \rho / 3)}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{R_1^3 \rho}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

(γ) Για τον υπολογισμό του δυναμικού, ξεκινάμε από το άπειρο, ολοκληρώνοντας

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \int_{r>R_2}^{\infty} dV = - \int_{r>R_2}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} \Rightarrow 0 - V(r > R_2) = -\frac{R_1^3 \rho}{3\epsilon_0} \int_{r>R_2}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = -\frac{R_1^3 \rho}{3\epsilon_0} \left(-\frac{1}{\infty} + \frac{1}{r} \right)$$

$$\text{και τελικά : } V(r > R_2) = \frac{R_1^3 \rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} \right)$$

Λόγω συνέχειας του δυναμικού στο $r = R_2$, και σταθερότητας του στην περιοχή ($R_1 < r < R_2$),

$$V(R_1 < r < R_2) = \frac{R_1^3 \rho}{3\epsilon_0 R_2}$$

Για την περιοχή ($0 < r < R_1$) ολοκληρώνουμε το αντίστοιχο ηλεκτρικό πεδίο

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \int_{r<R_1}^{R_1} dV = - \int_{r<R_1}^{R_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \frac{R_1^3 \rho}{3\epsilon_0 R_2} - V(r < R_1) = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \int_{r<R_1}^{R_1} r dr = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{R_1^2 - r^2}{2} \right)$$

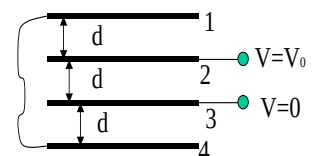
$$V(r < R_1) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{R_1^2 - r^2}{2} \right) + \frac{R_1^3 \rho}{3\epsilon_0 R_2}$$

$$\text{Στο κέντρο (} r=0 \text{) έχουμε: } V(r=0) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{R_1^2}{2} \right) + \frac{R_1^3 \rho}{3\epsilon_0 R_2} = \frac{\rho R_1^2}{3\epsilon_0} \left(\frac{1}{2} + \frac{R_1}{R_2} \right)$$

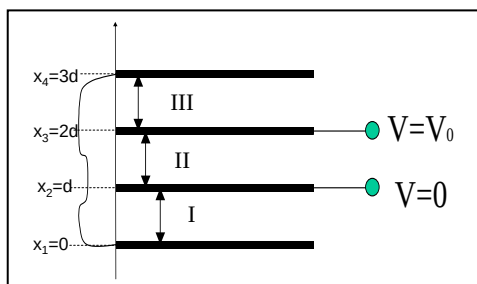
(δ) Η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια U υπολογίζεται ολοκληρώνοντας την πυκνότητα ηλεκτροστατικής

$$\text{ενέργειας: } U = \int_0^{\infty} \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 d^3r = \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^{R_1} \left(\frac{\rho r}{3\epsilon_0} \right)^2 (4\pi r^2 dr) + \frac{\epsilon_0}{2} \int_{R_2}^{\infty} \left(\frac{R_1^3 \rho}{3\epsilon_0 r^2} \right)^2 (4\pi r^2 dr) = \frac{4\rho^2 R_1^5}{5\epsilon_0}$$

4. Τέσσερις όμοιες μεγάλες παράλληλες μεταλλικές επιφάνειες απέχουν, ανά δύο, απόσταση d (όπως στο σχήμα). Συνδέουμε τις δύο εξωτερικές (1 και 4) με λεπτό μεταλλικό σύρμα αμελητέας χωρητικότητας, και τις δύο εσωτερικές με δυναμικά $V = 0$ (την 3) και $V = V_0 > 0$ (την 2). Υπολογίστε



- (α) το ηλεκτρικό πεδίο στους χώρους μεταξύ των πλακών,
(β) τη συνολική επιφανειακή πυκνότητα φορτίου κάθε μιας πλάκας.



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Ορίζουμε ως άξονα x , τον άξονα τον κάθετο στις μεταλλικές επιφάνειες και, υποθέτοντας αμελητέα τα φαινόμενα των άκρων, θεωρούμε ότι η συνάρτηση του δυναμικού είναι συνάρτηση μόνο της μεταβλητής x . Άρα, σε κάθε περιοχή (I, II, III), έχουμε:

$$\frac{\partial^2 V_I}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow V_I = \alpha + \beta x$$

$$\frac{\partial^2 V_{II}}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow V_{II} = \gamma + \delta x$$

$$\frac{\partial^2 V_{III}}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow V_{III} = \varepsilon + \zeta x$$

Εφαρμόζουμε τις συνοριακές συνθήκες, σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, θεωρώντας ότι το κοινό δυναμικό $V(x=0) = V(x=3d) = V_1$, οπότε :

$$\alpha = V_1, \quad \beta = -\frac{V_1}{d},$$

$$\gamma = -V_0, \quad \delta = \frac{V_0}{d}$$

$$\varepsilon = 3V_0 - 2V_1, \quad \zeta = \frac{(V_1 - V_0)}{d}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την φορά υπολογισμού της παραγώγου για την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $\sigma = -\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial x}$, έχουμε, για κάθε πλευρά των επιφανειών :

$$\sigma_I(x=0) = \beta, \quad \sigma_{II}(x=d) = \delta, \quad \sigma_{III}(x=2d) = \zeta,$$

$$\sigma_I(x=d) = -\beta, \quad \sigma_{II}(x=2d) = -\delta, \quad \sigma_{III}(x=3d) = -\zeta,$$

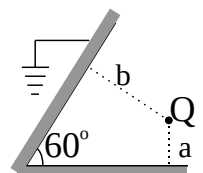
Αν υποθέσουμε ότι το κοινό δυναμικό των επιπέδων 1 και 4 έχει εξασφαλισθεί με αναδιανομή ενός μηδενικού συνολικού φορτίου (αφού δεν αναφέρεται φορτίο για τα αντίστοιχα επίπεδα):

$$\sigma_I(x=0) = -\sigma_{III}(x=3d) \Rightarrow \beta = \zeta \Rightarrow V_1 = \frac{V_0}{2}$$

Τελικά, τα δυναμικά, κατά περιοχή, είναι:

$$V_I = \frac{V_0}{2} \left(1 - \frac{x}{d} \right), \quad V_{II} = V_0 \left(-1 + \frac{x}{d} \right), \quad V_{III} = 2V_0 \left(1 - \frac{x}{4d} \right)$$

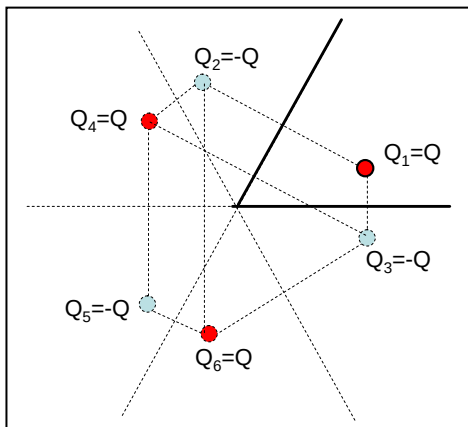
5. Δύο ημίπαιρα αγωγίμα επίπεδα τέμνονται κατά μήκος μίας ευθείας σχηματίζοντας διέδρη γωνία 60° όπως στο σχήμα. Και τα δύο επίπεδα είναι συνδεδεμένα με τη γη (δυναμικό $V_{\text{επιπέδων}}=0$). Στο εσωτερικό της γωνίας και σε αποστάσεις a και b αντίστοιχα από τις δύο πλευρές της γωνίας τοποθετείται φορτίο Q .



- (α) Προτείνετε εικονικά φορτία εκτός της γωνίας τέτοια ώστε, σε συνδυασμό με το πραγματικό φορτίο Q , να δίνουν για τον εντός της γωνίας χώρο ηλεκτρικό δυναμικό $V = V(\mathbf{r})$ και ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ που να ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες.
- (β) Μπορεί η μέθοδος που προτείνεται στο (α), να δουλέψει για οποιαδήποτε τιμή της διέδρης γωνίας;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Υποθέτουμε δύο εικονικά φορτία του Q_1 , ως προς τις δύο πλευρές της διέδρης γωνίας, αυτά είναι τα $Q_2 = Q_3 = -Q$ όπως στο σχήμα. Το καθένα από αυτά εξασφαλίζει, σε συνδυασμό με το Q_1 , το μηδενισμό του δυναμικού στο περιεχόμενο επίπεδο, αλλά ταυτόχρονα αλλάζει το δυναμικό του μη-περιεχόμενου επιπέδου.

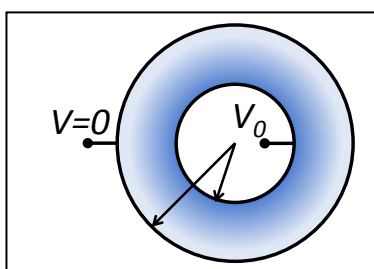


Άρα το $Q_2 = -Q$ χρειάζεται ένα εικονικό, ως προς την οριζόντια πλευρά, $Q_6 = Q$, και το $Q_3 = -Q$, χρειάζεται ένα εικονικό, ως προς την πλάγια πλευρά, $Q_4 = Q$. Με αυτόν τον τρόπο, υπάρχουν 4 συμμετρικά και 1 μη-συμμετρικό, για κάθε πλευρά της γωνίας. Χρειάζεται, επομένως, ένα εικονικό του Q_4 , ως προς την οριζόντια πλευρά, και ένα εικονικό του Q_6 , ως προς την πλάγια πλευρά. Λόγω της γεωμετρίας και της εναλλαγής των προσήμων, συμβαίνει να συμπίπτουν αυτά τα δύο τελευταία εικονικά φορτία, ως προς την θέση και την τιμή, αντίστοιχα, στο $Q_5 = -Q$.

Τελικά, με την βοήθεια των πέντε (5) εικονικών φορτίων, (που βρίσκονται όλα τους εκτός του χώρου στον οποίον ζητείται το δυναμικό και, επομένως, στον χώρο αυτό παραμένει μοναδικό σημείο που απειρίζεται το δυναμικό, η θέση του φορτίου $Q_1 = Q$, σύμφωνα και με την υπόθεση του προβλήματος), και σε συνδυασμό με το πραγματικό φορτίο, $Q_1 = Q$, εξασφαλίζεται ο μηδενισμός του δυναμικού και των δύο πλευρών. Όπως φαίνεται μάλιστα από το σχήμα, ο ίδιος συνδυασμός φορτίων θα μπορούσε να εξασφαλίσει το μηδενισμό στις πλευρές μίας διέδρης γωνίας 120° .

(β) Για να μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος που παρουσιάζεται στο (α), πρέπει η τιμή της διέδρης γωνίας να είναι άρτιο υποπολλαπλάσιο των 360° , έτσι ώστε η ακολουθία των εικονικών φορτίων να τερματίζεται, κλείνοντας στον εαυτό της. Διαφορετικά, θα χρειάζεται μία άπειρη ακολουθία εικονικών φορτίων, τα οποία θα συνεχίζουν να έχουν σημαντική συνεισφορά στην λύση, δεδομένου ότι βρίσκονται σε συγκρίσιμες αποστάσεις μεταξύ τους.

Στην περίπτωση δύο παράλληλων γειωμένων επιπέδων, με ένα φορτίο ανάμεσά τους, χρειάζεται άπειρη ακολουθία εικονικών φορτίων αλλά η απόστασή τους, από των χώρο μεταξύ των επιπέδων, μεγαλώνει συνεχώς, με αποτέλεσμα, από ένα φορτίο και μετά, η σειρά να μπορεί, πρακτικά, να διακοπεί σε κάποιον όρο, ανάλογα και με την επιδιωκόμενη ακρίβεια.



6. Δύο αγωγίμοι κυλινδρικοί φλοιοί έχουν κοινό άξονα και μήκος, L , πολύ μεγαλύτερο από τις ακτίνες τους $R_1 = R$ και $R_2 = 2R$, έτσι ώστε να μπορούμε να αγνοήσουμε τα φαινόμενα των άκρων, και να θεωρήσουμε ότι σε όλο το μήκος του συστήματος ($L \gg 2R$) όλα τα μεγέθη εξαρτώνται από την κάθετη απόσταση ($r_\perp$) από τον άξονα συμμετρίας του συστήματος. Ο εσωτερικός φλοιός είναι συνδεδεμένος με

δυναμικό $V_1 = V_0 > 0$. Ο εξωτερικός φλοιός έχει συνδεθεί με τη Γη ($V_2 = 0$). Στο χώρο μεταξύ των φλοιών βρίσκεται κατανεμημένο θετικό φορτίο με πυκνότητα τέτοια ώστε το ηλεκτρικό πεδίο να έχει μόνο ακτινική συνιστώσα, κάθετα στον άξονα συμμετρίας και σταθερού μέτρου μεταξύ των φλοιών, $\vec{E} = \hat{r}_\perp E_0$, $R_1 \leq r \leq R_2$.

(α) Να υπολογιστεί η πυκνότητα φορτίου χώρου και η συνάρτηση δυναμικού στην περιοχή μεταξύ των δύο αγωγίμων φλοιών, καθώς και η σχέση μεταξύ των E_0, V_0 (β) Να υπολογιστεί η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σε κάθε φλοιό, και το συνολικό φορτίο του συστήματος (στους δύο φλοιούς και στον ενδιάμεσο χώρο). (γ) Να υπολογιστεί η ηλεκτροστατική ενέργεια του συστήματος (χρησιμοποιήστε δύο διαφορετικούς τρόπους υπολογισμού και

συγκρίνετε το αποτέλεσμα). (δ) Σχεδιάστε ποιοτικό σκαρίφημα των δυναμικών γραμμών του ηλεκτροστατικού πεδίου. (ε) Θεωρήστε γνωστή την πυκνότητα φορτίου χώρου, μεταξύ των φλοιών, (όπως προέκυψε από το ερώτημα-α), και υπολογίστε κατευθείαν τη συνάρτηση δυναμικού, μέσω της εξίσωσης Poisson και των συνοριακών συνθηκών δυναμικού (αγνοώντας τη δοσμένη τιμή της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Από τη διαφορική μορφή του N. Gauss: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \Rightarrow \rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$

$$\text{Σε κυλινδρικές συντεταγμένες: } \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{r_{\perp}} \frac{\partial}{\partial r_{\perp}} (r_{\perp} E_{r_{\perp}}) + \frac{1}{r_{\perp}} \frac{\partial E_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\text{Οπότε: } \rho = \epsilon_0 \frac{1}{r_{\perp}} \frac{\partial}{\partial r_{\perp}} (r_{\perp} E_0) = \epsilon_0 \frac{1}{r_{\perp}} E_0 \Rightarrow \rho = \frac{\epsilon_0 E_0}{r_{\perp}}$$

Το δυναμικό υπολογίζεται από το πεδίο:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}_{\perp} \Rightarrow \int_R^{r_{\perp}} dV = -\int_R^{r_{\perp}} \vec{E} \cdot d\vec{r}_{\perp} \Rightarrow V(r_{\perp}) - V(R) = -E_0 (r_{\perp} - R)$$

$$\text{Τελικά: } V(r_{\perp}) = V_0 - E_0 (r_{\perp} - R)$$

Η σχέση των μεταξύ των E_0, V_0 , υπολογίζεται από τη συνοριακή συνθήκη στο $2R$:

$$V(2R) = V_0 - E_0 (2R - R) \Rightarrow E_0 = V_0 / R,$$

$$\text{οπότε: } V(r_{\perp}) = V_0 (2 - (r_{\perp} / R)) \text{ και } \rho = \epsilon_0 V_0 / (R r_{\perp})$$

(β) Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σε κάθε φλοιό, και το συνολικό φορτίο του συστήματος (στους δύο φλοιούς και στον ενδιάμεσο χώρο).

$$\sigma = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \hat{n} \Rightarrow \sigma(r_{\perp} = R) = \epsilon_0 (E_0 \hat{r}_{\perp}) \cdot \hat{r}_{\perp} = \epsilon_0 E_0$$

$$\sigma = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \hat{n} \Rightarrow \sigma(r_{\perp} = 2R) = \epsilon_0 (E_0 \hat{r}_{\perp}) \cdot (-\hat{r}_{\perp}) = -\epsilon_0 E_0$$

Τα συνολικά επιφανειακά φορτία:

$$Q_1 = Q(R) = (2\pi R L) (\epsilon_0 E_0) = 2\pi \epsilon_0 V_0 L, \quad Q_2 = Q(2R) = (2\pi 2R L) (-\epsilon_0 E_0) = -4\pi \epsilon_0 V_0 L,$$

Το φορτίο χώρου (μεταξύ των οπλισμών)

$$Q = \int \rho d^3 r = \int_R^{2R} (\epsilon_0 V_0 / R r_{\perp}) (2\pi r_{\perp} dr_{\perp} L) = 2\pi \epsilon_0 V_0 L$$

Παρατηρούμε ότι τα “φορτία του εσωτερικού φλοιού” + “φορτία μεταξύ των φλοιών” είναι ίσα και αντίθετα με τα “φορτία στον εξωτερικό φλοιό”.

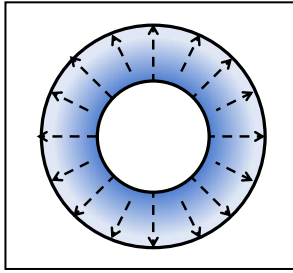
(γ) Η ηλεκτροστατική ενέργεια του συστήματος

(γ1) Μέσω της πυκνότητας Η/Σ ενέργειας

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{z=0}^D (E^2) (d^3 r) = \frac{\epsilon_0}{2} (E_0^2) \pi (4R^2 - R^2) L \Rightarrow W = 3\pi R^2 L E_0^2 / 2 = 3\pi L V_0^2 / 2$$

$$(\gamma 2) \text{ Μέσω της σχέσης: } W = \frac{1}{2} \left[\sum_i Q_i V_i \right] = \frac{1}{2} \left[Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + \int_R^{2R} \rho V d^3 r \right]$$

$$W = \frac{1}{2} \left[(2\pi \epsilon_0 V_0 L) \cdot V_0 + (-4\pi \epsilon_0 V_0 L) \cdot 0 + \int_R^{2R} \left(\frac{\epsilon_0 V_0}{R r_{\perp}} \right) V_0 \left(2 - \frac{r_{\perp}}{R} \right) 2\pi r_{\perp} L dr_{\perp} \right] = 3\pi \epsilon_0 V_0^2 L / 2$$



(δ) Ποιοτικό σκαρίφημα των δυναμικών γραμμών του ηλεκτροστατικού πεδίου φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η διατήρηση της “πυκνότητας” των δυναμικών γραμμών, από το R προς το $2R$, (αφού η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι σταθερή), εξασφαλίζεται από το γεγονός ότι “φυτρώνουν” νέες δυναμικές γραμμές λόγω της πυκνότητας του φορτίου χώρου. [Η απεικόνιση της “δημιουργίας” των δυναμικών γραμμών από συγκεκριμένους κύκλους- $r_{\perp}$ είναι σχηματική, και δεν ανταποκρίνεται στην

πραγματικότητα. Για τη συγκεκριμένη περίπτωση, ακτινικού πεδίου αλλά με σταθερό μέτρο έντασης, δεν υπάρχει σχεδιαστικός τρόπος να αποδοθεί η συνεχής δημιουργία ακτινικών δυναμικών γραμμών που την εξασφαλίζει]

(ε) Εξίσωση Poisson: $\nabla^2 V = -\rho / \epsilon_0 \Rightarrow \nabla^2 V = -V_0 / Rr_{\perp}$

Σε κυλινδρικές συντεταγμένες: $\nabla^2 V = \frac{1}{r_{\perp}} \frac{\partial}{\partial r_{\perp}} \left(r_{\perp} \frac{\partial V}{\partial r_{\perp}} \right) + \frac{1}{r_{\perp}^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

Για $V = V(r_{\perp})$ η εξίσωση Poisson: $\frac{1}{r_{\perp}} \frac{\partial}{\partial r_{\perp}} \left(r_{\perp} \frac{\partial V}{\partial r_{\perp}} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = -\frac{V_0}{Rr_{\perp}} \Rightarrow \frac{d}{dr_{\perp}} \left(r_{\perp} \frac{dV}{dr_{\perp}} \right) = -\frac{V_0}{R}$

$$d \left(r_{\perp} \frac{dV}{dr_{\perp}} \right) = -\frac{V_0}{R} dr_{\perp} \Rightarrow r_{\perp} \frac{dV}{dr_{\perp}} = -\frac{V_0}{R} r_{\perp} + C_1 \Rightarrow \frac{dV}{dr_{\perp}} = -\frac{V_0}{R} + \frac{C_1}{r_{\perp}}$$

$$dV = -\frac{V_0}{R} dr_{\perp} + \frac{C_1}{r_{\perp}} dr_{\perp} \Rightarrow V = -\frac{V_0}{R} r_{\perp} + C_1 \ln r_{\perp} + C_2$$

$$V(R) = V_0 \Rightarrow V_0 = -\frac{V_0}{R} R + C_1 \ln R + C_2 \Rightarrow C_2 + C_1 \ln R = 2V_0$$

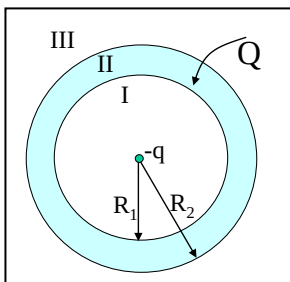
$$V(2R) = 0 \Rightarrow -2V_0 + C_1 \ln 2R + C_2 = 0 \Rightarrow 0 = C_2 + C_1 \ln 2R = 2V_0$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες σχέσεις: $C_1 \ln 2 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$ και $C_2 = 2V_0$

Και τελικά: $V = V_2 \left(2 - \frac{r_{\perp}}{R} \right)$, όπως και από το ερώτημα-α.

7. Ένα αγωγίμο σφαιρικό συμπαγές κέλυφος πεπερασμένου πάχους (με εσωτερική ακτίνα R_1 και εξωτερική R_2), φέρει συνολικό φορτίο $Q > 0$ και στο κέντρο του τοποθετούμε ένα σημειακό φορτίο $-q < 0$. Όταν αποκατασταθεί ηλεκτροστατική ισορροπία:

- Να προσδιορίσετε τα ηλεκτρικά φορτία σε όλες τις επιφάνειες (εσωτερική και εξωτερική του σφαιρικού κελύφους) και να υπολογίσετε τις προκύπτουσες επιφανειακές (σ) ή χωρικές (ρ) πυκνότητες φορτίου.
- Να υπολογίσετε το ηλεκτρικό πεδίο στις περιοχές του χώρου $0 < r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ και $r > R_2$.
- Να υπολογίσετε το δυναμικό παντού.



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Το πρόβλημα παρουσιάζει σφαιρική συμμετρία.

Το σημειακό φορτίο $-q$ επάγει στην εσωτερική επιφάνεια ($r = R_1$) ένα επιφανειακό φορτίο $-(-q) = +q$ με επιφανειακή

$$\text{πυκνότητα } \sigma(R_1) = \frac{q}{4\pi R_1^2}.$$

[Αυτό εξασφαλίζει το μηδενισμό του ηλεκτρικού πεδίου στο συμπαγές τμήμα του φλοιού]

Λόγω της διατήρησης του συνολικού φορτίου στο φλοιό, στην εξωτερική του επιφάνεια επάγεται συνολικό επιφανειακό φορτίο $Q - q$ με σφαιρικά συμμετρική επιφανειακή πυκνότητα $\sigma(R_2) = \frac{Q - q}{4\pi R_2^2}$. Σε όλο το σύστημα δεν υπάρχει χωρική πυκνότητα φορτίου.

(β) Το ηλεκτρικό πεδίο είναι, επίσης, σφαιρικά συμμετρικό και υπολογίζεται με το Νόμο του Gauss ως εξής:

$$\vec{E}_I(\vec{r}) \cdot (4\pi r^2) = -q \Rightarrow \vec{E}_I(\vec{r}) = \frac{-q}{4\pi r^2} \hat{r}$$

$$\vec{E}_{II}(\vec{r}) \cdot (4\pi r^2) = 0 \Rightarrow \vec{E}_{II}(\vec{r}) = 0$$

$$\vec{E}_{III}(\vec{r}) \cdot (4\pi r^2) = Q - q \Rightarrow \vec{E}_{III}(\vec{r}) = \frac{Q - q}{4\pi r^2} \hat{r}$$

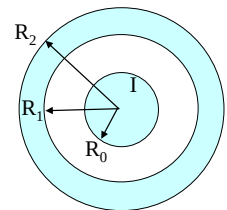
(γ) Το σφαιρικά συμμετρικό δυναμικό υπολογίζεται με σημείο αναφοράς το άπειρο, όπου $V(r \rightarrow \infty) = 0$, οπότε βρίσκουμε:

$$V(r > R_2) = \frac{Q - q}{4\pi r}$$

$$V(R_1 < r < R_2) = \frac{Q - q}{4\pi R_2}$$

$$V(r < R_1) = \frac{Q - q}{4\pi R_2} + \frac{q}{4\pi R_1} + \frac{-q}{4\pi r}$$

8. Σφαιρικός μεταλλικός φλοιός εσωτερικής ακτίνας R_1 και εξωτερικής R_2 , φέρει συνολικό φορτίο Q . Στο εσωτερικό του φλοιού και ομόκεντρα ως προς αυτόν στηρίζεται μηχανικά, (χωρίς να βρίσκεται σε ηλεκτρική επαφή με τα τοιχώματα του φλοιού) συμπαγής αγωγίμη σφαίρα ακτίνας $R_0 < R_1$, η οποία φέρει συνολικό φορτίο q .

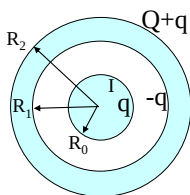


(α) Υπολογίστε την ηλεκτροστατική ενέργεια του συστήματος.

(β) Συνδέουμε ηλεκτρικά τη σφαίρα με το φλοιό, μέσω λεπτού αγωγίμου σύρματος, με ασήμαντη χωρητικότητα ως προς το υπόλοιπο σύστημα. Υποθέστε, ότι μετά την αποκατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας το φορτίο της εσωτερικής σφαίρας είναι q' , και υπολογίστε την ηλεκτροστατική ενέργεια του συστήματος στη νέα κατάσταση.

(γ) Δείξτε με ενεργειακά επιχειρήματα ποια θα είναι η τελική κατανομή του συνολικού φορτίου στα δύο σώματα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

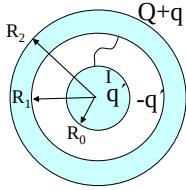


(α) Για τον μηδενισμό του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό του φλοιού, η κατανομή φορτίων στις σφαιρικές επιφάνειες ακτίνων R_0 , R_1 , και R_2 , είναι q , $-q$, και $Q+q$, αντίστοιχα. Τα πεδία, επομένως είναι:

$$\vec{E}_I(R_0 < r < R_1) = \frac{q\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (1), \quad \text{και} \quad \vec{E}_{II}(r > R_2) = \frac{(Q+q)\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2)$$

οπότε, η ηλεκτροστατική ενέργεια, υπολογίζεται ολοκληρώνοντας την αντίστοιχη πυκνότητα:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \left[\int_{R_0}^{R_1} E_I^2 d^3r + \int_{R_2}^{\infty} E_{II}^2 d^3r \right] \quad (3)$$



(β) Αν υποθέσουμε ότι, κατά την σύνδεση των δύο αγωγών με λεπτό αγωγίμο σύρμα, είναι δυνατόν να έχουμε ηλεκτροστατική κατάσταση με φορτίο q' στη σφαίρα, τότε, για να έχουμε μηδενισμό του πεδίου στο

εσωτερικό του φλοιού, θα πρέπει να έχουμε φορτίο $-q'$ στην εσωτερική επιφάνεια του φλοιού, οπότε, λόγω της διατήρησης του φορτίου στο συνολικό πλέον (λόγω της σύνδεσης με το σύρμα) σύστημα, το φορτίο της εξωτερικής επιφάνειας του φλοιού πρέπει να είναι $Q+q$. Επομένως, τα ηλεκτρικά πεδία, στην νέα κατάσταση, θα είναι :

$$\vec{E}'_I(R_0 < r < R_1) = \frac{q'\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (4), \quad \text{και} \quad \vec{E}'_{II}(r > R_2) = \frac{(Q+q)\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \vec{E}_{II}(r > R_2) \quad (5)$$

οπότε, η ηλεκτροστατική ενέργεια, υπολογίζεται ολοκληρώνοντας την αντίστοιχη πυκνότητα:

$$W' = \frac{\epsilon_0}{2} \left[\int_{R_0}^{R_1} E_I'^2 d^3r + \int_{R_2}^{\infty} E_{II}'^2 d^3r \right] \quad (6)$$

(γ) Επειδή $\vec{E}'_{II}(r > R_2) = \vec{E}_{II}(r > R_2)$ (5), το δεύτερο ολοκλήρωμα της ηλεκτροστατικής ενέργειας παραμένει ίδιο για τις περιπτώσεις (α) και (β), επομένως, η W' ελαχιστοποιείται όταν μηδενιστεί το πρώτο (πάντα θετικό) ολοκλήρωμα, δηλ., όταν $\boxed{q' = 0}$.

9. Σφαιρικός πυκνωτής αποτελείται από δύο λεπτούς ομόκεντρους σφαιρικούς μεταλλικούς φλοιούς με ακτίνες R_1 και R_2 , αντίστοιχα, ($R_2 > R_1$). Υποθέστε ότι στον εσωτερικό φλοιό υπάρχει θετικό φορτίο Q και στον εξωτερικό φορτίο $-Q$.

- (α) Υπολογίστε τη χωρητικότητα του πυκνωτή, συναρτήσει των R_1 , R_2 και ϵ_0 (ηλεκτρική διαπερατότητα του κενού).
- (β) Δείξτε ότι η μέγιστη απόλυτη τιμή του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό του πυκνωτή παρατηρείται στην επιφάνεια του εσωτερικού φλοιού.
- (γ) Αν η εξωτερική ακτίνα του πυκνωτή έχει τιμή $R_2 = a$, και η μέγιστη απόλυτη τιμή του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό του πυκνωτή είναι E_0 , να υπολογίσετε την τιμή της εσωτερικής ακτίνας, συναρτήσει του a , ώστε ο πυκνωτής να αποθηκεύει τη μέγιστη δυνατή ηλεκτροστατική ενέργεια W . Δίνεται ότι $W = \frac{1}{2} C |\Delta V|^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Για να βρούμε το πεδίο στην περιοχή $R_1 < r < R_2$, χρησιμοποιούμε ομόκεντρη με τους φλοιούς σφαιρική επιφάνεια Gauss ακτίνας r , ($R_1 < r < R_2$). Ο νόμος του Gauss δίνει για την επιφάνεια αυτή

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Από τη σχέση $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$, βρίσκουμε για τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των δύο φλοιών:

$$\int_{R_1}^{R_2} dV = - \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \hat{r} \cdot d\vec{r} \quad (V_2 - V_1) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

όπου $V_1 = V(R_1)$ και $V_2 = V(R_2)$.

Η χωρητικότητα υπολογίζεται από τη σχέση $C \equiv \frac{|Q|}{|\Delta V|}$, όπου $|\Delta V| = |V_2 - V_1|$.

Επομένως, $C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$.

(β) Επειδή το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό πυκνωτή είναι της μορφής $\vec{E} = k \frac{\hat{r}}{r^2}$, η μέγιστη απόλυτη τιμή παρατηρείται στη μικρότερη δυνατή ακτίνα $r = R_1$.

(γ) Η ενέργεια που αποθηκεύεται στον πυκνωτή είναι

$$W = \frac{1}{2} C |\Delta V|^2 = \frac{1}{2} 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 a}{a - R_1} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{a - R_1}{R_1 a} \right)^2.$$

Συναρτήσει του $E_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1^2}$, $W = 2\pi\epsilon_0 E_0^2 R_1^4 \frac{a - R_1}{R_1 a} = 2\pi\epsilon_0 \frac{E_0^2}{a} R_1^3 (a - R_1)$.

Για ακρότατο της W ως προς μεταβολή του R_1 , πρέπει να είναι $\frac{dW}{dR_1} = 0$, οπότε

$$2\pi\epsilon_0 \frac{E_0^2}{a} (3R_1^2 a - 4R_1^3) = 0 \quad \text{ή} \quad R_1 = \frac{3}{4} a$$

Με την τιμή της δεύτερης παραγώγου στο σημείο του ακρότατου, διαπιστώνουμε ότι πρόκειται για μέγιστο:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W}{dR_1^2} &= 2\pi\epsilon_0 \frac{E_0^2}{a} (6R_1 a - 12R_1^2) = 12\pi\epsilon_0 \frac{E_0^2}{a} R_1 (a - 2R_1), \\ \Rightarrow \left. \frac{d^2 W}{dR_1^2} \right|_{R_1 = \frac{3}{4}a} &= -\frac{9}{2} \epsilon_0 a E_0^2 < 0 \quad \text{άρα μέγιστο.} \end{aligned}$$

Εναλλακτικά, δεδομένου ότι η W είναι θετική και είναι $W = 0$ για $R_1 = 0$ και για $R_1 = a$, είναι προφανές ότι το ακρότατο είναι μέγιστο.

Η αντίστοιχη μέγιστη τιμή του W είναι:

$$W_{\max} = \frac{27}{128} \pi \epsilon_0 a^3 E_0^2.$$

10. Δύο ομόκεντροι μεταλλικοί σφαιρικοί φλοιοί ακτίνων R_1 και $R_2 > R_1$ φέρουν φορτία Q_1 και Q_2 ($Q_2 > 0$).

(α) Υπολογίστε το δυναμικό παντού στο χώρο.

(β) Δείξτε ότι, αν οι δύο φλοιοί ενωθούν με ένα αγωγίμο σύρμα θα έχουμε μεταφορά φορτίων από τον εσωτερικό στον εξωτερικό.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Συνδυάζοντας σφαιρική συμμετρία και Ν. του Gauss

(α) $r < R_1$, $\vec{E}(r < R_1) = 0$

$$R_1 < r < R_2, \quad \vec{E}(R_1 < r < R_2) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

$$r > R_2, \quad \vec{E}(R_1 < r < R_1) = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

(β) Η συνολική Ηλεκτροστατική ενέργεια του συστήματος είναι

$$W_E = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 d^3r + \int_{R_2}^{R_3} \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 d^3r$$

Παρατηρούμε ότι ο δεύτερος όρος παραμένει ίδιος, ανεξάρτητα από την τιμή του εσωτερικού φορτίου, οπότε η συνολική ενέργεια W_E ελαχιστοποιείται με τον μηδενισμό του εσωτερικού φορτίου και, επομένως, με την μεταφορά του στον εξωτερικό φλοιό (λόγω διατήρησης του φορτίου).

11. Μια συμπαγής μεταλλική (αγώγιμη) σφαίρα ακτίνας R_0 , που φέρει φορτίο Q , περιβάλλεται από ένα παχύ ομόκεντρο μεταλλικό (αγώγιμο) συμπαγές κέλυφος εσωτερικής ακτίνας R_1 και εξωτερικής ακτίνας R_2 , ($R_0 < R_1 < R_2$), το οποίο διατηρείται σε σταθερό δυναμικό V_0 .

(α) Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στους χώρους I($0 < r < R_0$), II($R_0 < r < R_1$), III($R_1 < r < R_2$), IV($r > R_2$).

(β) Βρείτε το δυναμικό παντού.

(γ) Βρείτε τις επιφανειακές πυκνότητες φορτίου στις σφαιρικές επιφάνειες ακτίνων R_0 , R_1 και R_2 .

(δ) Βρείτε την ηλεκτροστατική ενέργεια του συστήματος.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Συνδυάζοντας σφαιρική συμμετρία και Ν. του Gauss

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad 0 < r < R_0 \quad \vec{E}(0 < r < R_0) &= 0 \\ R_0 < r < R_1, \quad \vec{E}(R_0 < r < R_1) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \\ R_1 < r < R_2, \quad \vec{E}(R_1 < r < R_2) &= 0 \\ r > R_2, \quad \vec{E}(r > R_2) &= \frac{V_0 R_2}{r^2} \hat{r} \end{aligned}$$

Το τελευταίο αποτέλεσμα προκύπτει με βάση το θεώρημα μοναδικότητας, την σφαιρική συμμετρία σε συνδυασμό με το Ν Gauss, οπότε $V(r > R_2) = \frac{C}{r}$, και την οριακή συνθήκη, $V(r = R_2) = V_0 \Rightarrow C = VR_2$.

(β) Για τον υπολογισμό του δυναμικού, ξεκινάμε από έξω προς τα μέσα

$$\begin{aligned}
r > R_2, \quad V(r > R_2) &= \frac{V_0 R_2}{r} \hat{r} \\
R_1 < r < R_2, \quad V(R_1 < r < R_2) &= V_0 \\
R_0 < r < R_1, \quad V(R_0 < r < R_1) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + V_0 \\
0 < r < R_0, \quad V(0 < r < R_0) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0} + V_0
\end{aligned}$$

(γ) Για τις επιφανειακές πυκνότητες φορτίου στις σφαιρικές επιφάνειες ακτίνων R_0 , R_1 και R_2 .

$$\begin{aligned}
\sigma_1(r = R_0) &= \frac{Q}{4\pi R_0^2} \\
\sigma_2(r = R_1) &= \frac{-Q}{4\pi R_1^2}
\end{aligned}$$

Για την εξωτερική επιφάνεια το φορτίο Q_0 είναι τέτοιο ώστε $\frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 R_2} = V_0 \Rightarrow Q_0 = 4\pi\epsilon_0 R_2 V_0$,

άρα

$$\sigma_3(r = R_2) = \frac{Q_0}{4\pi R_2^2} = \epsilon_0 \frac{V_0}{R_2}$$

(δ) Για την ηλεκτροστατική ενέργεια του συστήματος.

$$W_E = \frac{1}{2} \sum_i Q_i V_i = \frac{1}{2} \left[Q \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0} + V_0 \right) - QV_0 + Q_0 V_0 \right] = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R_0} + 2\pi\epsilon_0 R_2 V_0^2$$

12. Θεωρήστε δύο ομόκεντρους λεπτότοιχους αγωγίμους σφαιρικούς φλοιούς, με ακτίνες a και b αντίστοιχα ($b > a$). Αν ο εσωτερικός φλοιός φέρει φορτίο Q_1 και ο εξωτερικός Q_2 , βρείτε το δυναμικό ως συνάρτηση της απόστασης r από το κέντρο του συστήματος [$V(r \rightarrow \infty) = 0$]. Βρείτε το Q_2 , συναρτήσει των Q_1 , a και b , έτσι ώστε το δυναμικό του εσωτερικού φλοιού να είναι μηδέν. Σε αυτή την περίπτωση, σχεδιάστε πρόχειρα το $V(r)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Αν ορίσουμε τρεις περιοχές: $I : (0 < r < a)$, $II : (a < r < b)$, $III : (b < r)$

Έξω από τις σφαιρικά συμμετρικές κατανομές τα φορτία φαίνονται ως σημειακά.

Μέσα σε σφαιρικούς φλοιούς, με σφαιρικά συμμετρική επιφανειακή κατανομή φορτίου, το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν, επομένως το δυναμικό έχει σταθερή τιμή και ίση με τιμή του στην επιφάνεια.

Με βάση τα παραπάνω και την αρχή της επαλληλίας:

$$\text{Στην περιοχή } III : V_{III} = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

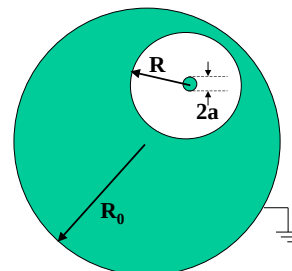
$$\text{Στην περιοχή } II : V_{II} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 b}$$

Στην περιοχή I : $V_I = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 b}$

Προκειμένου να έχουμε μηδενικό δυναμικό στον εσωτερικό φλοιό $V_I = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 b} = 0$

Οπότε $Q_2 = -Q_1 \left(1 + \frac{b}{a}\right)$

13. (I) Αφόρτιστη μεταλλική σφαίρα ακτίνας R_0 έχει παράκεντρη σφαιρική κοιλότητα ακτίνας R , και είναι γειωμένη (συνδεδεμένη με δυναμικό μηδέν). Στο εσωτερικό της κοιλότητας και ομόκεντρα ως προς αυτήν, τοποθετείται μικρή μεταλλική σφαίρα ακτίνας a και συνολικού φορτίου Q . Να υπολογιστούν: (Iα) η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου παντού, (Iβ) η ηλεκτροστατική ενέργεια του συστήματος.



Μετακινούμε λίγο την μικρή σφαίρα (ακτίνας a) από το κέντρο της κοιλότητας και περιμένουμε να αποκατασταθεί μόνιμη κατάσταση. Να υπολογιστούν: (Iγ) η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου παντού, (Iδ) η ηλεκτροστατική ενέργεια του συστήματος.

(II) Το ίδιο σύστημα έχει αποσυνδεθεί από την γείωση. Να απαντηθούν τα ερωτήματα (IIα), (IIβ), (IIγ), (IIδ), κατ' αντιστοιχία των ερωτημάτων (Iα), (Iβ), (Iγ), (Iδ).

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Για ευκολία στην περιγραφή των μεγεθών, θα χρησιμοποιήσουμε ως μεταβλητή την ακτίνα r , ($0 < r \leq R_0$), για τα μεγέθη που αφορούν την μεγάλη σφαίρα, και την μεταβλητή r' , ($0 < r' \leq R$), για τα μεγέθη που αφορούν την κοιλότητα και την μικρή σφαίρα.

Iα) $E(0 < r' \leq a) = 0$, (εσωτερικό αγωγού, σε ηλεκτροστατική ισορροπία)

$$\vec{E}(a < r' \leq R) = \frac{Q \hat{r}'}{4\pi\epsilon_0 r'^2}, \quad (\text{N. Gauss και σφαιρική συμμετρία})$$

$E(0 < r \leq R_0) = 0$, (εσωτερικό αγωγού, σε ηλεκτροστατική ισορροπία)

$$\vec{E}(R_0 < r < \infty) = \frac{Q \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (\text{N. Gauss και σφαιρική συμμετρία των συνοριακών συνθηκών})$$

Iβ) Για την ηλεκτροστατική ενέργεια του συστήματος, μπορούμε, είτε

(i) να ολοκληρώσουμε την πυκνότητα ηλεκτροστατικής ενέργειας ($\epsilon_0 E^2 / 2$), παντού όπου υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο

(ii) να αθροίσουμε όλες τις συνεισφορές $U = \frac{1}{2} \sum_i Q_i V_i$, δεδομένου ότι φορτία υπάρχουν σε επιφάνειες σταθερού δυναμικού (στα σύνορα των αγωγών)

$$(i) \quad U = \frac{\epsilon_0}{2} \left[\int_a^R \left(\frac{Q \hat{r}'}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \right)^2 (4\pi r'^2 dr') + \int_{R_0}^{\infty} \left(\frac{Q \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 (4\pi r^2 dr) \right] =$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\int_a^R \frac{dr'}{r'^2} + \int_{R_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \right] = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\left(-\frac{1}{R} + \frac{1}{a} \right) + \left(-\frac{1}{\infty} + \frac{1}{R_0} \right) \right] = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R} + \frac{1}{a} \right]$$

(ii) Για τον υπολογισμό του $U = \frac{1}{2} \sum_i Q_i V_i$ πρέπει να υπολογίσουμε τα δυναμικά σε όλες τις επιφάνειες που υπάρχουν φορτία. Ξεκινώντας από το άπειρο, έχουμε:

$$V(r \geq R_0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \Rightarrow V(r = R_0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0} \quad \text{και,} \quad \text{λόγω} \quad \text{του} \quad \text{αγωγού:}$$

$$V(r = R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0}$$

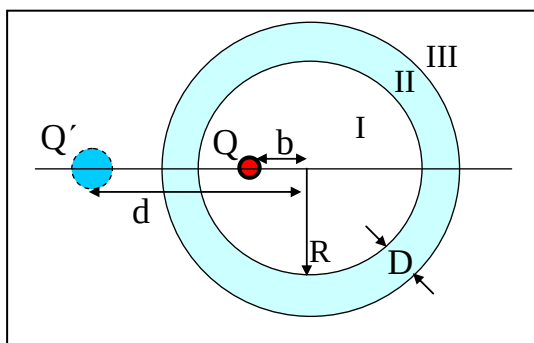
$$\int_{r' \geq a}^R dV = - \int_{r' \geq a}^R \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_{r' \geq a}^R \frac{Q dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow V(R) - V(r') = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{R} + \frac{1}{r'} \right)$$

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0} - V(r') = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{R} + \frac{1}{r'} \right) \Rightarrow V(r') = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R} + \frac{1}{r'} \right) \Rightarrow V(a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R} + \frac{1}{a} \right)$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_i Q_i V_i = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R} + \frac{1}{a} \right) Q + \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R_0} (-Q + Q) = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R} + \frac{1}{a} \right)$$

14. Ένας κούφιος σφαιρικός αγωγός, εσωτερικής ακτίνας R και πάχους D , έχει στο εσωτερικό του, και σε απόσταση $b = R/2$ από το κέντρο του, θετικό φορτίο Q . Αν ο αγωγός ήταν αρχικά (πριν την τοποθέτηση του Q) αφόρτιστος, υπολογίστε: (α) το δυναμικό παντού στο χώρο, (β) την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στην εξωτερική και στην εσωτερική επιφάνεια. [Υπόδειξη: Για το εσωτερικό της κοιλότητας θεωρείστε, πλην του φορτίου Q , και εικονικό φορτίο $Q' = -Q(R/b)$ σε απόσταση $d = R^2/b$, από το κέντρο της και σε κατάλληλη θέση, σε συνδυασμό με το θεώρημα της μοναδικότητας.]

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



Πρέπει να υπολογίσουμε το δυναμικό και στις τρεις περιοχές I, II, III, που σημειώνονται στο σχήμα.

Η παρουσία του φορτίου Q στο εσωτερικό της κοιλότητας έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη ενός συνολικού φορτίου $-Q$, στην εσωτερική επιφάνεια της κοιλότητας, από ηλεκτροστατική επαγωγή. Αυτό το επαγόμενο φορτίο κατανέμεται ομοιόμορφα στην εσωτερική επιφάνεια, αλλά εξασφαλίζει το μηδενισμό του ηλεκτρικού πεδίου

στο συμπαγές εσωτερικό του φλοιού.

Επειδή ο φλοιός είναι αρχικά αφόρτιστος, θα πρέπει η ανάπτυξη του φορτίου $-Q$ της εσωτερικής επιφάνειας να συνοδεύεται από την ανάπτυξη φορτίου Q στην εξωτερική επιφάνεια. Το φορτίο της εξωτερικής επιφάνειας κατανέμεται ομοιόμορφα, χωρίς να επηρεάζεται από την ασυμμετρία του εσωτερικού της κοιλότητας, δεδομένου ότι το πεδίο στο συμπαγές τμήμα του φλοιού μηδενίζεται.

Στην περιοχή III, με βάση την σφαιρική συμμετρία και το νόμο του Gauss, το ηλεκτρικό πεδίο και το αντίστοιχο δυναμικό υπολογίζονται:

$$\vec{E}_{III} = \frac{Q\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad V_{III} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad \text{επομένως το δυναμικό στην εξωτερική (και στην}$$

εσωτερική) επιφάνεια του φλοιού είναι : $V_{III} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (R+D)}$

Στην περιοχή II, λόγω του ότι είναι περιοχή αγωγού:

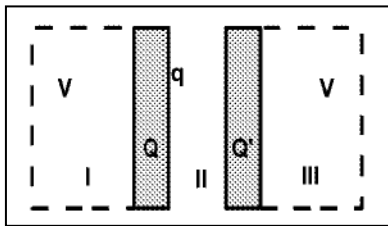
$$E_{II} = 0, \quad V_{II} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (R+D)}.$$

Στην περιοχή I, έχουμε ένα πραγματικό φορτίο Q και την συνοριακή συνθήκη:

$$V_I(r+R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (R+D)}.$$

Γνωρίζουμε ότι, αν η συνοριακή συνθήκη ήταν: $V_I(r=R)=0$, το κατάλληλο εικονικό φορτίο (εκτός της περιοχής I), θα ήταν το εικονικό φορτίο $Q' = -Q(R/b)$ σε απόσταση $d = R^2/b$, προς την πλευρά του πραγματικού φορτίου. Άρα, στην περίπτωση μας, αρκεί να προσθέσουμε στο δυναμικό το σταθερό δυναμικό της συνοριακής επιφάνειας, (το οποίο δεν επηρεάζει το ηλεκτρικό πεδίο), και επομένως:

$$V_I = V_I(Q) + V_I(Q') + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (R+D)}, \quad \vec{E}_I = \vec{E}_I(Q) + \vec{E}_I(Q')$$



15. Δύο παράλληλες λεπτές και μεγάλες αγωγίμες πλάκες σχηματίζουν έναν πυκνωτή. Οι πλάκες απέχουν απόσταση D και η κάθε μια έχει εμβαδόν S_0 . Η αριστερή πλάκα έχει συνολικό φορτίο Q ενώ η δεξιά συνολικό φορτίο Q' ($Q > Q' > 0$). Οι πλάκες θεωρούνται πολύ μεγάλες οπότε τα ηλεκτρικά πεδία θεωρούνται παντού ότι είναι ομογενή. α) Αν

στην εσωτερική πλευρά της αριστερής πλάκας εμφανίζεται φορτίο q , βρείτε το φορτίο στις άλλες τρεις πλευρές καθώς και το ηλεκτρικό πεδίο στις τρεις περιοχές του χώρου (I, II, και III), συναρτήσει των Q , Q' και q . β) Για να βρούμε το q , καταφεύγουμε στην ελαχιστοποίηση της ενέργειας του συστήματος. Αν θεωρήσουμε αριστερά και δεξιά χώρο με όγκο V , βρείτε τη συνολική ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου συναρτήσει των Q , Q' , q , V , D και S_0 . γ) Ποιο είναι το q που ελαχιστοποιεί την ενέργεια αυτή? δ) Αν θεωρήσουμε ότι ο όγκος $S_0 D$ (ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή) είναι πολύ μικρότερος από τον όγκο V , ποιο είναι το q ? ε) Πώς γράφεται τώρα το ηλεκτρικό πεδίο στους τρεις χώρους ως συνάρτηση των Q και Q' ?

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έστω ότι τα φορτία κατανέμονται στις πλευρές των πλακών, ως εξής:

$$Q_{II} = \pm q, \text{ οπότε, λόγω διατήρησης φορτίου: } Q_I = Q - q, \quad Q_{III} = Q' + q$$

Με αντίστοιχες πυκνότητες: $\sigma_{II} = \pm \frac{q}{S_0}, \quad \sigma_I = \frac{Q-q}{S_0}, \quad \sigma_{III} = \frac{Q'+q}{S_0}$

και εντάσεις ηλεκτρικού πεδίου: $|E_{II}| = \frac{q}{\epsilon_0 S_0}, \quad |E_I| = \frac{Q-q}{2\epsilon_0 S_0}, \quad |E_{III}| = \frac{Q'+q}{2\epsilon_0 S_0}$

Αν υπολογίσουμε την συνολική ενέργεια που αντιστοιχεί στον όγκο $V_0 = S_0 D$, μεταξύ των οπλισμών και σε όγκους $V = S_0 L$ στις περιοχές I και III, έχουμε:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int |E|^2 d^3r = \frac{\epsilon_0}{2} \left[\left(\frac{Q-q}{2\epsilon_0 S_0} \right)^2 S_0 L + \left(\frac{q}{\epsilon_0 S_0} \right)^2 S_0 D + \left(\frac{Q'+q}{2\epsilon_0 S_0} \right)^2 S_0 L \right]$$

Το ακρότατο της Ηλεκτροστατικής Ενέργειας υπολογίζεται ως:

$$\frac{dW}{dq} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\epsilon_0 S_0} \frac{d}{dq} \left[\left(\frac{Q-q}{2} \right)^2 L + q^2 D + \left(\frac{Q'+q}{2} \right)^2 L \right] = 0$$

$$2q(L+2D) = L(Q-Q') \Rightarrow q = \frac{(Q-Q')}{2(1+(2D/L))}$$

Άρα, στο όριο $L \rightarrow \infty$, έχουμε: $q = \frac{(Q-Q')}{2}$, οπότε και $Q-q = Q'-q = (Q+Q')/2$

Μορφή διαφορικών τελεστών σε καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων

Κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\vec{\nabla}V = \hat{r}_\perp \frac{\partial V}{\partial r_\perp} + \hat{\phi} \frac{1}{r_\perp} \frac{\partial V}{\partial \phi} + \hat{z} \frac{\partial V}{\partial z},$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r_\perp} \frac{\partial}{\partial r_\perp} (r_\perp A_{r_\perp}) + \frac{1}{r_\perp} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r_\perp} \frac{\partial}{\partial r_\perp} \left(r_\perp \frac{\partial V}{\partial r_\perp} \right) + \frac{1}{r_\perp^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \quad r_\perp = \sqrt{x^2 + y^2} : \text{η κάθετη απόσταση από τον άξονα-z.}$$

Σφαιρικές συντεταγμένες

$$\vec{\nabla}V = \hat{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi},$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$