Επαναληπτική Εξέταση Πραγματικής Ανάλυσης, 30/09/2010

Θέμα 1 (α) Δείξτε ότι αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε το γράφημα της f, $Grf = \{(x, y) : y = f(x)\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.
(β) Βρείτε τις κλειστότητες των παρακάτω συνόλων (δικαιολογήστε την απάντησή σας).

(i) $A_1 = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$.
(ii) $A_2 = \{(x, \frac{1}{x}) : x > 0\}$.
(iii) $A_3 = \{(x, y) : x > 0, y \geq 0\}$.
(iv) $A_4 = \{(\frac{1}{n}, x) : x \in \mathbb{R}, n \geq 1, n \in \mathbb{N}\}$.

Θέμα 2 Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και F μη κενό υποσύνολο του X.

(α) Δώστε τον ορισμό την απόστασης $\rho(x, F)$ για $x \in X$.
(β) Δείξτε ότι $\rho(x, F) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{F}$.
(γ) Δείξτε ότι για κάθε $x, y \in X$ $\rho(y, F) \leq \rho(x, y) + \rho(x, F)$.
(δ) Αν $\epsilon > 0$ δείξτε ότι το σύνολο $F_\epsilon = \{x \in X : \rho(x, F) < \epsilon\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

Θέμα 3 Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος.
(α) Δώστε τον ορισμό του μεμονωμένου σημείου του X.
(β) Έστω ότι ο X δεν έχει μεμονωμένα σημεία και D πυκνό υποσύνολο του X. Δείξτε τα ακόλουθα:
(i) Για κάθε $x \in X$ και $\epsilon > 0$, $S(x, \epsilon) \cap D$ είναι άπειρο σύνολο.
(ii) Για κάθε $x \in X$ υπάρχει ακολουθία $(x_n)_n$ στο D με $x_n \neq x_m$ για $n \neq m$ ώστε $x_n \to x$.
(iii) Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση ώστε $f[D]$ πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f[X]$ είναι πεπερασμένο και για κάθε $t \in f[X]$, το $f^{-1}(\{t\})$ είναι ανοικτό και κλειστό υποσύνολο του X.

Θέμα 4
(α) Διατυπώστε τον ορισμό της συμπάγειας και τον ορισμό της ιδιότητας της πεπερασμένης τομής ενός μετρικού χώρου (X, ρ).
(β) Δείξτε ότι ο (X, ρ) είναι συμπαγής αν και μόνο αν για τις οικογένειες των κλειστών υποσυνόλων του X ικανοποιείται η ιδιότητα της πεπερασμένης τομής.
(γ) Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και d ισοδύναμη μετρική στον X. Δείξτε ότι ο (X, d) είναι συμπαγής μετρικός χώρος.
(δ) Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και D άπειρο υποσύνολο του X. Δείξτε ότι το D έχει ένα τουλάχιστον σημείο συσσώρευσης.

Καλή Επιτυχία