ΟΜΑΔΑ Α

ΣΕΜΦΕ: Μαθηματική Ανάλυση ΙΙΙ **Φεβρουάριος 2009**

Ονοματεπώνυμο:

ΘΕΜΑ 1: **Α)**Να δειχθεί ότι το διανυσματικό πεδίο $\boldsymbol{F}(x,y,z)=\left(x+z,\ -y-z,\ x-y\right)$ είναι αστρόβιλο και να βρεθεί μια συνάρτηση δυναμικού του. **Β)** Να υπολογισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του $\boldsymbol{F}$ στην καμπύλη $\boldsymbol{r}(t)=\left(\cos t,\ \sin 2t,\ \dfrac{t}{\pi}\right),\ t\in[0,\pi]$.

ΘΕΜΑ 2: **Α)** Να βρεθεί η ροή του διανυσματικού πεδίου $\boldsymbol{F}(x,y,z)=\left(0,\ yz,\ z^2\right)$ προς το εξωτερικό του τμήματος της κυλινδρικής επιφάνειας $y^2+z^2=1,\ z\geq 0$ που αποκόπτεται από τα επίπεδα $x=0$ και $x=1$.
Β) Θεωρούμε την καμπύλη $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ με παράμετρο το μήκος τόξου, μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $\boldsymbol{T}$, καμπυλότητα k και στρέψη τ. Χρησιμοποιώντας τους τύπους Frenet: $\boldsymbol{T}'=k\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{N}'=-k\boldsymbol{T}+\sigma\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}'=-\sigma\boldsymbol{N}$ να αποδείξετε ότι: $\boldsymbol{T}\cdot\left(\boldsymbol{T}'\times\boldsymbol{T}''\right)=k^2\sigma$.

ΘΕΜΑ 3 : **Α.** Διατυπώστε με ακρίβεια τα Θεωρήματα Stokes και Gauss κάνοντας και σχετικό για το κάθε ένα σχήμα όπου θα εμφανίζονται όλες οι έννοιες που περιγράφονται στη διατύπωση του Θεωρήματος.
Β. Έστω $\mathbf{F}=P(x,y,z)\mathbf{i}+Q(x,y,z)\mathbf{j}+R(x,y,z)\mathbf{k}$ ένα C_2 διανυσματικό πεδίο στον $\mathbb{R}^3$ (Οι συναρτήσεις P,Q,R έχουν συνεχείς παραγώγους 2ης τάξης). Έστω ακόμα S η επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας του $\mathbb{R}^3$. Δείξτε ότι : $\iint_S \nabla\times\mathbf{F}d\mathbf{S}=0$, χρησιμοποιώντας το: **1)** Θεώρημα του Gauss και **2)** Θεώρημα του Stokes. Αν η κλειστή επιφάνεια S δεν είναι σφαίρα ισχύει ?.
Β) Να διατυπωθεί με ακρίβεια το θεώρημα του Green κάνοντας και σχετικό σχήμα και να υπολογισθεί αποκλειστικά με τη χρήση του το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου $\boldsymbol{F}(x,y)=\left(y^2,\ -xy\right)$ στο σύνορο του χωρίου . $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\leq x\leq 2,\ 2\leq y\leq 1+x^2\right\}$.

ΘΕΜΑ 4: **Α.** Θεωρούμε τον κώνο με παράπλευρη επιφάνεια $z=\sqrt{x^2+y^2}$, κορυφή $(0,0,0)$ και βάση το επίπεδο $z=2$. Σχεδιάστε τον και βρείτε τον όγκο του. (Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μετασχηματισμό σε κυλινδρικές συντεταγμένες.)
Β. Έστω P το παραλληλόγραμμο που φράσσεται από τις $y=2x,\quad y=2x-2,\quad y=x,\quad y=x+1$. Υπολογίστε το $\iint_P xy\,dxdy$.

Τύποι:

Αν c καμπύλη και S επιφάνεια με παραμετρικές παραστάσεις $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t),\ t\in[a,b]\subset\mathbb{R}$ και $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$, $(u,v)\in D\subset\mathbb{R}^2$ αντίστοιχα και $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ πραγματική συνάρτηση και $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$ διανυσματικό πεδίο C^1 τάξης, τότε:

$$\nabla f=(f_x,f_y,f_z),\quad div\boldsymbol{F}=\nabla\cdot\boldsymbol{F}=P_x+Q_y+R_z,\quad \nabla\times\boldsymbol{F}=rot\boldsymbol{F}=\left(R_y-Q_z,P_z-R_x,Q_x-P_y\right),\ \frac{\partial f}{\partial n}=\nabla f\cdot\boldsymbol{n}$$

Επικαμπύλιο Α΄είδους: $\int_c f ds=\int_a^b f(\boldsymbol{r}(t))\|\boldsymbol{r}'(t)\|dt$ Επικαμπύλιο Β΄είδους: $\int_c \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))\cdot\boldsymbol{r}'(t)dt$

Επιφανειακό Α΄είδους $\iint_S f dS=\iint_D f(\boldsymbol{r}(u,v))\|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\|dudv$

Επιφανειακά Β΄είδους $\iint_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_D \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(u,v))\cdot\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v dudv$

Διάρκεια εξέτασης 3Ω